

気象現象と損害保険

－ 天候デリバティブの価格など－

主席研究員 吉澤 容一

目 次

1. はじめに

2. 気象現象

- (1) 気象現象の概要
- (2) 気象現象の基本的な方程式
- (3) 気象現象の特性
- (4) 気象予測

3. 天候変化と損害保険（天候デリバティブ）

- (1) 天候デリバティブの概要
- (2) 主なデリバティブの形態

4. 基本的な天候デリバティブの価格理論

- (1) 数理的理論
- (2) 裁定価格理論

5. 天候デリバティブ価格評価のための工夫

- (1) 数理的理論のための工夫
- (2) 裁定理論適用のための工夫
- (3) 気象学的予測の活用

6. 大規模自然災害と損害保険

- (1) 大規模自然災害の状況
- (2) 大規模自然災害のリスク管理者
- (3) 再保険
- (4) 資本市場
- (5) 政府の役割

7. おわりに

補足資料 A. 基本方程式

補足資料 B. インデックスモデリング

補足資料 C. 時系列モデル

補足資料 D. ブラック・ショールズ式

補足資料 E. 均衡理論による価格評価

補足資料 F. 相関のある資産の活用による価格評価

補足資料 G. 最適ポートフォリオの活用による価格評価

1. はじめに

人間の生活および産業活動は、様々な形態で気象現象の影響を受ける。本稿では、気象現象と損害保険との関わりについて、天候デリバティブを中心に紹介する。

第2節では、本稿のベースとなる気象現象の基本的な事項について簡単に解説する。第3節では、気温変化などの天候の変動によるリスクをヘッジする天候デリバティブの機能の概要を説明する。第4節では、この天候デリバティブの価格算出の基本的な考え方について保険が採用している伝統的な保険数理的手法とファイナンスでも利用されている裁定理論を用いる手法について、更に第5節では第4節の応用について解説する。第6節では天候デリバティブ以外の気象および保険が大きく関係する分野である大規模自然災害（Natural Catastrophe）に対する保険ヘッジ等について保険会社（保険、再保険）、金融市場（CAT Bond など）、政府などの活動について紹介する。

2. 気象現象

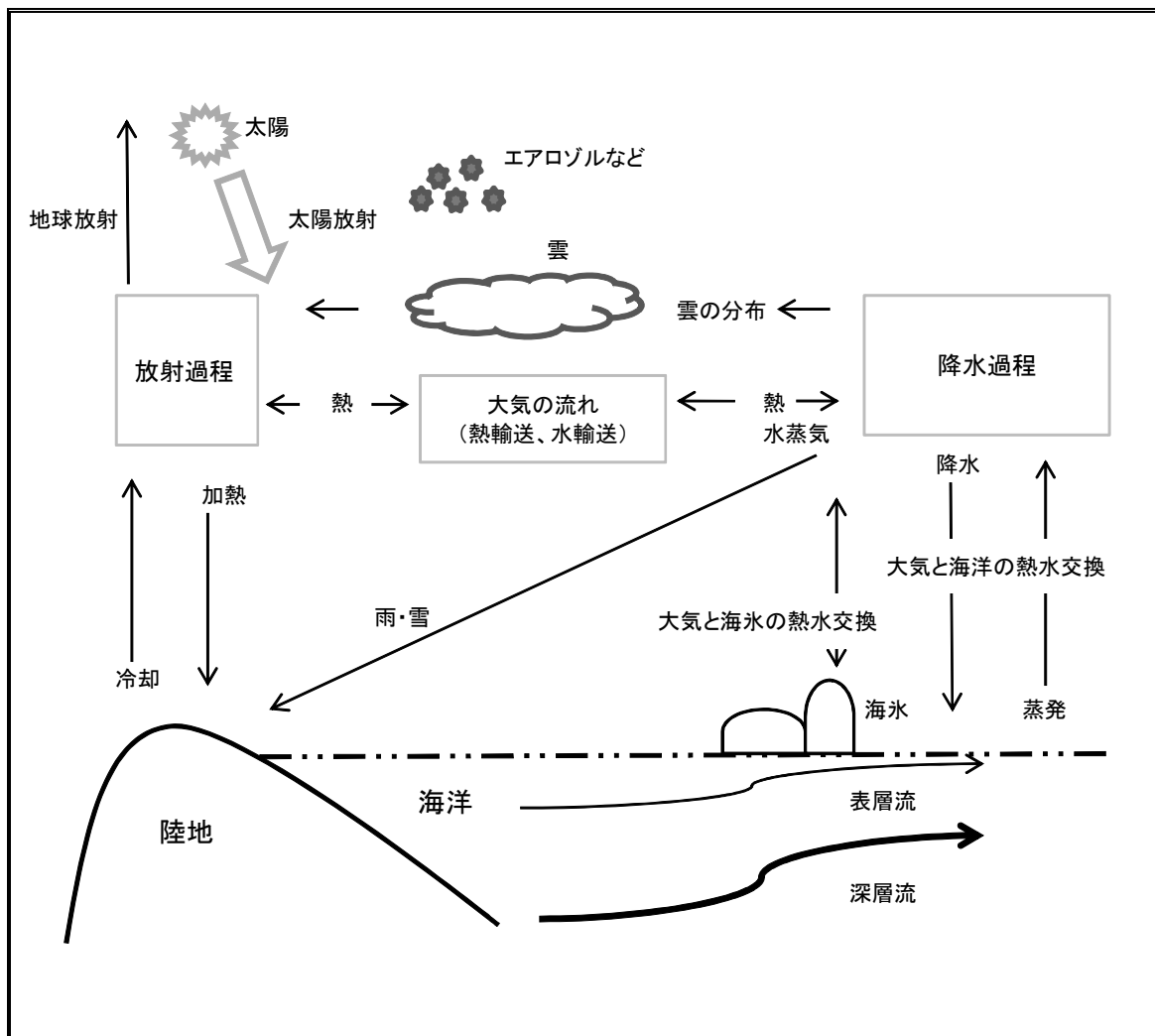
気象現象とは、大気中で起こる現象である。身近なものでは、晴れ、曇り、雨などの天気あげられ、長期的な現象としては地球温暖化などの気候変動がある。

地球大気を連続流体と見なして、流体力学と熱力学の諸法則を適用することによって、気象現象の基本的な仕組みを解明できる。

(1) 気象現象の概要

地球の気候現象は、図表1のとおり、太陽の放射と地球の放射、大気と陸面の水分や熱の交換、大気と海洋の水分と熱の交換、大気と海氷の水分と熱の交換雲などの形成による降水や放射過程への影響、大気の流れ、海水の表層や深層での流れ、大気中の微量ガス・エアロゾル・雲などによる散乱と吸収などを行っている。そして、これらの活動は、運動方程式、熱エネルギー保存の法則、質量保存の法則、気体の状態方程式などに従っている。

図表 1 気候現象の概観図



(出典：各種資料をもとに作成)

(2) 気象現象の基本的な方程式

気象学では、地球大気を連続流体とみなし、その中で起こっている運動を流体力学および熱力学の諸法則により分析、予測する。この際に基本となる運動方程式、質量保存式、状態方程式、熱力学の第一法則を紹介する。

a. 運動方程式

大気は自転する地球の重力で捕らえた流体である。大気の運動は、これに働く重力、気圧傾度力、回転系の見かけ上の慣性力 (Coriolis 力)、回転系での遠心力、摩擦力の合計である。この関係は一本の運動方程式¹⁾に表現できる。

¹⁾ この運動方程式の算式は、補足資料 A を参照願う。

b. 質量保存式

空間に固定された単位容積に対して質量の流出入量は、その容器内の密度の時間変化である。この関係は、質量保存式²として定式化される。

c. 状態方程式

理想気体の場合には、温度、圧力、密度の間には、温度に密度に乗じた値と圧力は比例するという状態方程式³の関係が成立する。このときの比例係数は気体によって固有に定まる。

d. 熱力学の第一法則

熱力学の第一法則⁴によると、単位質量の気体に加えられた熱は、一部は気体内部エネルギーの増加に使用され、残りは気体が外部に対して行う仕事に使用されるという関係が成り立つ。

(3) 気象現象の特性

a. 流体運動としての特性

地球の大気の運動は、一般の流体力学と比較していろいろな特色がある。第一に、地球が自転していることである。回転している地球の大気中の運動を、固体地球に固定された座標から眺めるので、回転系の見かけ上の慣性力である Coriolis 力が働く。さらに、地球は球形であるため、Coriolis 力は緯度によって異なる。第二に、地球大気の密度は高さなどの場所によって異なり、密度成層をなしている。大気も海洋も密度成層をなしているため浮力が異なり、これが重要な役割を担う。第三に、放射や大気中の水分の変化に伴い、大気は絶えず加熱あるいは冷却され、これによって大気の流れが絶えず引き起こされている。第四に、大気も海洋も、いわゆる層流でなく、いつも乱れている。最後に、様々な空間、時間スケールの運動が交錯していることにある。

b. 考慮すべき主な気象現象

(a) エルニーニョなど

エルニーニョとは、数年に一度起こる熱帯太平洋規模の高水温現象である。エルニーニョはスペイン語 El Niño 「幼子イエス・キリスト」の意味であり、ペルー漁民が毎年クリスマスごろに現れる小規模な暖流をエルニーニョと呼んでいた。

エルニーニョ現象は、太平洋赤道中部から南米のペルー沿岸にかけての広い地域

² この質量保存式の算式は、補足資料 A を参照願う。

³ この状態方程式の算式は、補足資料 A を参照願う。

⁴ この熱力学の第一法則の算式は、補足資料 A を参照願う。

で海面の水温が例年と比較して高くなり、この状態が半年から1年半程度続く現象である。エルニーニョ現象は、海面のみの現象ではなく海洋の内部、大気の変動とも密接に関係している。エルニーニョとは逆に、同じ海域で海面水温が平年より低い状態が続く現象はラニーニャ（La Niña：El Niñoの女性形）と呼ばれている。

エルニーニョ現象が発生しているときは、貿易風が弱く、太平洋西側の暖水は通常より薄く、東側の冷水のわき上がり弱い。このため、中部から東部太平洋赤道域の海面水温が通常より高くなり、それに伴い、雲が盛んに発生する海域も通常より東に移動している。

また、オーストラリア北部のダーウィンとタヒチ島の地上気圧の関係が、ダーウィンの気圧が高い年はタヒチの気圧が低く、ダーウィンの気圧が低い年はタヒチの気圧が高くなるという現象があり、これは南方振動（Southern Oscillation）と呼ばれている。海洋上で発生するエルニーニョが強まるときは大気中で発生する南方振動が強まるという両者の間に一定の関係があり、海洋と大気の間に強い相互作用が働いていることが研究されている。エルニーニョと南方振動を合わせて ENSO（El Niño and Southern Oscillation）という。

(b) エアロゾル

エアロゾル（大気のちり）は、温室効果気体、対流圏オゾンとともに地球の放射伝達機能に大きな影響を与えている。

地球は、太陽放射エネルギーを受け取り、宇宙空間に熱赤外放射エネルギーを射出している。これらの放射エネルギーを伝達する電磁波は、水蒸気や二酸化炭素などの大気気体、雲やエアロゾルなどの大気粒子、地表面によって複雑に吸収・散乱・射出されている。これらのエネルギーのやり取りは場所によって不均衡であり、この不均衡を解消するため大気や海洋の運動が駆動される。

(4) 気象予測

a. 気象予測の歴史

気象の数値シミュレーションが進んだ要因の一つが、天気予報という気象学の応用分野からの要請である。初めての試みは、20世紀初頭にライプチヒ大学の物理学者ビアクネスが、流体力学の方程式をもとに数値計算する天気予報を提案したことを起源とする。

1920年代には、リチャードソンの夢として知られているように、1922年にイギリスのリチャードソンが手計算による数値計算による天気予報を試みた⁵。本格的な数値

⁵ 1922年に出版された Lewis F. Richardson, “Weather Prediction By Numerical Process” が気象現象の数値予測を論じた古典的な書籍である。

計算による天気予報が稼働したのは、コンピュータが実用化された第2次世界大戦後のことである。

1950年には、プリンストン高等研究所のフォン・ノイマンは、チェルニーなどの多くの気象学者と協力して、大気の運動方程式のコンピュータ解析によって大気の大規模な運動を再現することに成功した。コンピュータの高速化に比例して、天気予報の精度は飛躍的に向上してきた。大気システムの理解が深まり、初期値の精度が上がれば、同様な原理で天候の長期予報が可能になると信じられるようになった。

b. バタフライ効果とカオス

この長期予報の夢を打ち砕いたのが1962年のローレンツによるカオス(Chaos)⁶の発見である。このカオスは「ブラジルで1匹のバタフライがはばたくとテキサスで竜巻が起こるか」というバタフライ(蝶)効果として有名である。1匹のバタフライを入れると、風の分布がバタフライの羽ばたき分だけ大気の初期条件を乱す。この初期値のズレが長期予報の結果に大きな影響を与え、バタフライを入れない場合と比較して結果に大きな差異が生ずる。

この差異の原因は、長期予報に用いられる初期値の有効数字以下の誤差によるものである。予報に用いられる初期値である観測そのものが、一定間隔毎に設置された観測点で行われているため誤差を含んでおり、この誤差を解消することは不可能に近い。ローレンツの発見したように大気非線形性によるカオス性により、決定論的な長期予報は不可能となる⁷。

図表2は、ローレンツがカオスを発見した際に利用した連立微分方程式の解の軌道(実際は3次元)をY-Z平面上に表示したものである。この特徴は、解軌道が有限の範囲内で交わることなく右に左にランダムに廻り続けることである。有限の範囲に無限の長さの解軌道がつまっているので、解軌道は極めて接近している。左右の2つの輪が交差する中央付近では、中央から右の輪向かう解軌道と左の輪に向かう解軌道が密に接近している。

この際に、注目すべきことは、解軌道がフラクタル構造⁸をなしていることである。このため、拡大操作を限界回繰り返しても親子の相似関係は続くので、左右の解軌道は無限小の距離で接近している。従って、初期値に僅かなノイズ(誤差)が発生する

⁶ 本来予測可能な決定論的な系を求める際に、初期条件に含まれる誤差が時間とともに指数関数的に拡大するため、長期的な予測が難しい系の性質

Edward N. Lorenz, "Deterministic Non periodic Flow", 1962

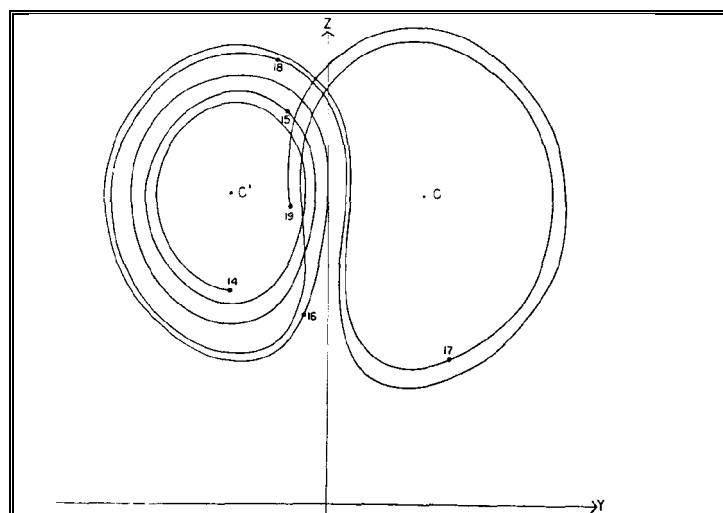
⁷ Lorenz の用いた方程式は次のとおりである。

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{dt} &= -\lambda Z + rX - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ\end{aligned}$$

⁸ 自己相似的な構造をいう。

と右に向う解軌道のものが左の解軌道となってしまう。つまり、ノイズの存在により確定論的な予測が難しくなるのである。

図表 2 バタフライ効果



(出典 : Edward N. Lorenz, Deterministic Nonperiodic Flow, 1963)

c. 気象予測

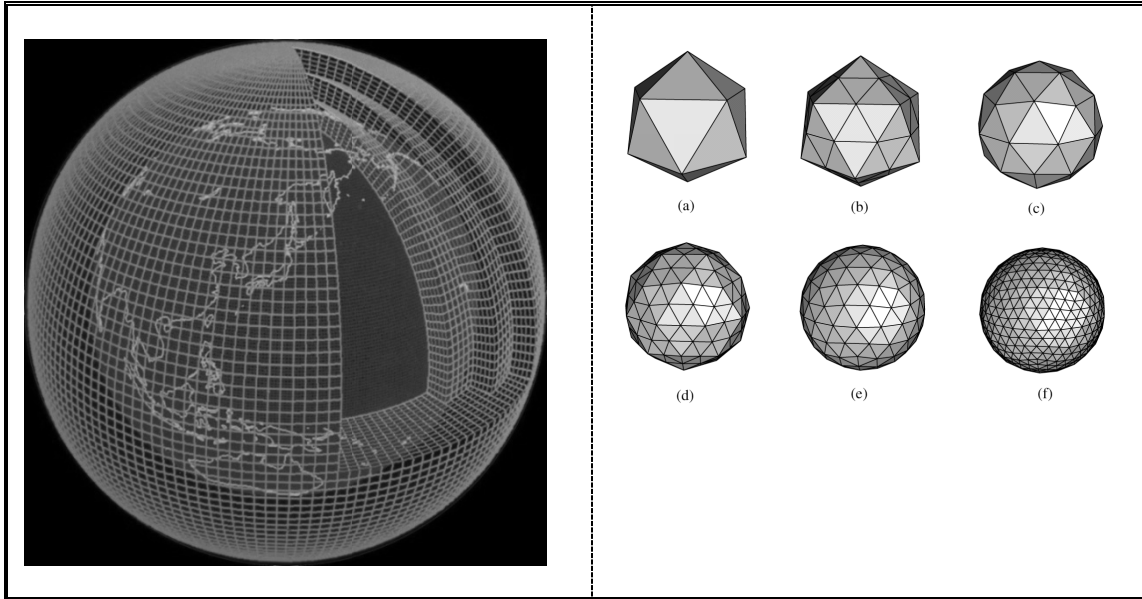
気候モデルは、コンピュータの中にもう一つの地球を作り、それを用いて気候システムの仕組みを研究するものである。地球の気候を定める、大気、海洋、陸面、海氷などの地球の表層のサブシステムから気候システムは構成される。

気候システム研究センターの気候モデルは、実際の地球の気候システムを忠実に模擬しようとするもので、地球を覆う大気や海洋の運動などを、流体力学や熱力学といった物理法則に基づく偏微分方程式系として定式化し、これを離散化して時間発展問題として解いている。

具体的には、大気や海洋の運動を3次元の格子に細分化して、回転球面上の流体力学方程式系として、スーパーコンピュータによりシミュレーションする。

この格子は、正20面体を何回も分割して作成する。図表3の右半分は、この格子による球面作成の過程を示している。(a)は正20面体、(b)はこれを分割し4倍の80面体としたもの、(c)は(b)を球面に近くなるよう補正したもの、(d)はさらに分割し16倍の320面体としたもの、(e)は(d)を球面に近くなるよう補正したもの、(f)はさらに分割し1,280面体としたものである。このように正20面体の分割を繰り返して球面に近い格子によって地球を覆い、図表3の左半分のような格子大気モデルを作成する。

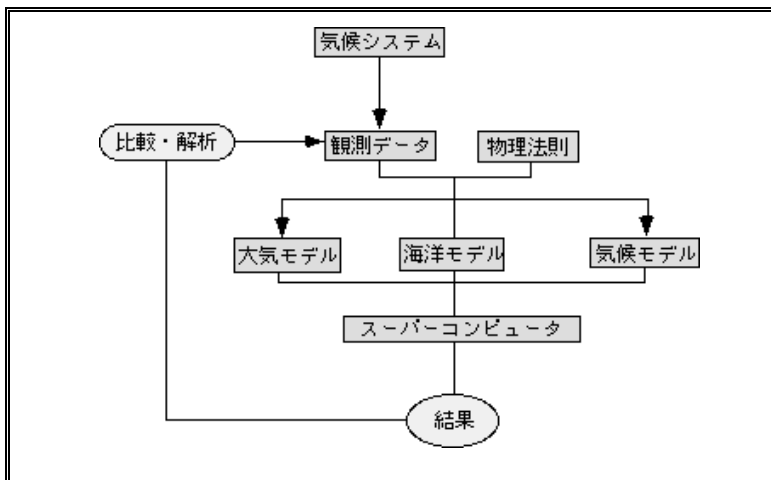
図表 3 格子大気モデルの作成



(出典：東京大学気候システムセンターのウェブサイトより)

気象現象の数値モデルでは、図表 1 のような気候現象を、図表 4 のとおり数値モデル化してスーパーコンピュータにより気象現象を数値的に解析する。気候システムからの観測によってデータを取得し、物理法則に基づく大気モデル、海洋モデル、気候モデルを統合してスーパーコンピュータによって数値シミュレーションし、気候を予測する。なお、気候変動予測のために長期的予測に用いる数値モデルの基本構成は、原則的には通常の数値予報モデルと同じである。しかし、この場合は、大気と海洋との相互作用、炭酸ガス、オゾン、エアロゾルなどの大気成分の変動なども考慮しなければならない。

図表 4 気象現象の数値モデル



(出典：東京大学気候システムセンターのウェブサイトより)

d. アンサンブル予測

一般に、数値モデルによる天気予報の精度は、予報時間とともに低下していく。この大きな要因は、大気のカオス性により初期値の誤差が時間とともに予報結果を大きく拡大することにある。この初期値の誤差が予測結果に与える影響を評価するためアンサンブル予報が開発された。

アンサンブル予報では、わずかに初期値の異なる複数の予測を行い、複数の予測結果やこれらの分散から、確率的に出現する可能性の高い気象現象を予測するとともに、この予測の信頼度も評価する。

3. 天候変化と損害保険（天候デリバティブ）

(1) 天候デリバティブの概要

世界で最初取引された天候デリバティブは、1997年9月にエンロン（Enron）社とコチ（Koch）社が、ウィスコンシン州の冬季の気温を対象としたものであると言われている。また、1999年には、シカゴ・マーカンタイル取引所（The Chicago Mercantile Exchange：以下「CME」）に、気温を対象としたインデックスが上場されている。

典型的な天候デリバティブは、気温を対象としたものである。高温日（Heating Degree Days：以下「HDD」）、低温日（Cooling Degree Days：以下「CDD」といった日々の平均気温を指数化したデリバティブである。

$$\bigcirc \text{ HDD} = \text{Max} (I - T, 0)$$

$$\bigcirc \text{ CDD} = \text{Max} (T - I, 0)$$

ただし T は日々の平均気温、I は基準とする温度

基準温度を 25 度として、ある月の気温に対して定まる HDD、累積 HDD、CDD、累積 CDD は図表 5 のとおりとなる。また、これをグラフ化したものが図表 6 である。

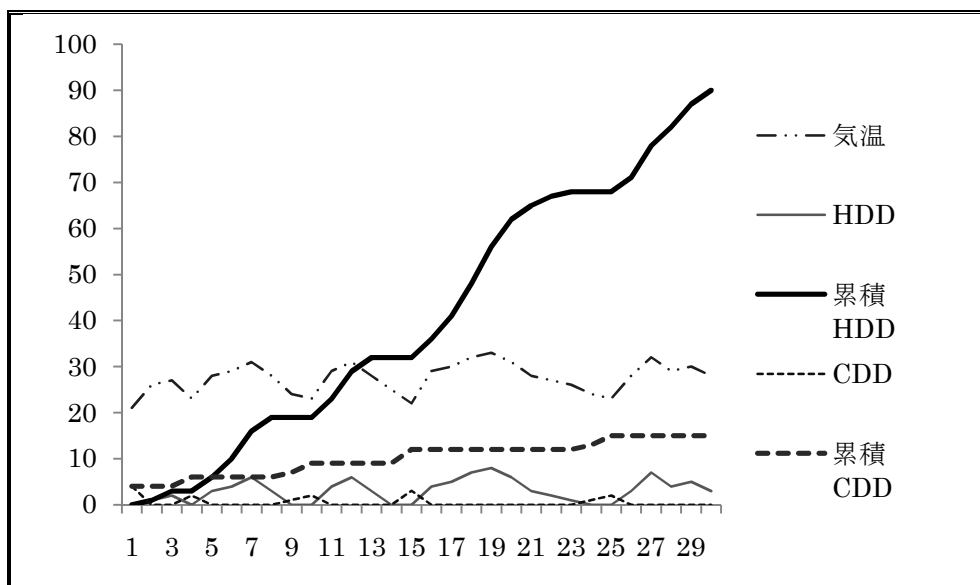
例えば、清涼飲料水販売を行う会社は、夏の気温が 25 度を下回ると販売が落ちるとする。この場合には、累積 CDD に関する天候デリバティブを購入することにより、販売減少リスクをヘッジすることができる。

なお、天候デリバティブ行使の対象の多くの場合は気温であるが、この他に、降雨量、降雪量、湿度、風力などもある。

図表 5 気温と HDD・CDD の事例（基準温度 25 度）

日	気温	HDD	累積 HDD	CDD	累積 CDD	日	気温	HDD	累積 HDD	CDD	累積 CDD
1	21	0	0	4	4	6	29	4	36	0	12
2	26	1	1	0	4	17	30	5	41	0	12
3	27	2	3	0	4	18	32	7	48	0	12
4	23	0	3	2	6	19	33	8	56	0	12
5	28	3	6	0	6	20	31	6	62	0	12
6	29	4	10	0	6	21	28	3	65	0	12
7	31	6	16	0	6	22	27	2	67	0	12
8	28	3	19	0	6	23	26	1	68	0	12
9	24	0	19	1	7	24	24	0	68	1	13
10	23	0	19	2	9	25	23	0	68	2	15
11	29	4	23	0	9	26	28	3	71	0	15
12	31	6	29	0	9	27	32	7	78	0	15
13	28	3	32	0	9	28	29	4	82	0	15
14	25	0	32	0	9	29	30	5	87	0	15
15	22	0	32	3	12	30	28	3	90	0	15

図表 6 気温と HDD・CDD の事例（グラフ）



(2) 主なデリバティブの形態

代表的な天候デリバティブは、ジュウソン 等⁹によると次のとおり、スワップ、コール、プット、カラー、ストラドル、ストラングルなどがある。

⁹ Stephen Jewson and Anders Brix with Christine Ziehmann, “Weather Derivative Valuation” (2005)

- ① スワップ¹⁰は、現契約のペイオフを交換する取引である。
- ② カラー¹¹は、スワップと類似しているが、中間の一定区間ではペイオフをゼロとする取引である。
- ③ コール¹²は、行使価格以下を下回る場合には現契約のペイオフがゼロとなる取引である。
- ④ プット¹³は、現契約と符号を反対とする取引であり、行使価格以下を上回る場合にはペイオフがゼロとなる取引である。
- ⑤ ストラドル¹⁴は、プットとコールを合成したペイオフを有する取引であり、行使価格を起点として、行使価格からの乖離度合いによってペイオフが増加する。
- ⑥ ストラングル¹⁵は、ストラドルと類似しているが、カラーと同様に中間の一定区間ではペイオフがゼロとなる取引である。

¹⁰ キャップ $L_{\$}$ とフロアー $-L_{\$}$ 付のスワップのペイオフを算式で記述すると次のとおり。

$$p(x) = \begin{cases} -L_{\$} & \text{if } x < L_1 \\ D(x - K) & \text{if } L_1 \leq x \leq L_2 \\ L_{\$} & \text{if } x > L_2 \end{cases}$$

¹¹ 行使価格 K_1 と K_2 、キャップ $L_{\$}$ とフロアー $-L_{\$}$ 付カラーのペイオフを算式で記述すると次のとおりである。

$$p(x) = \begin{cases} -L_{\$} & \text{if } x < L_1 \\ D(x - K_1) & \text{if } L_1 \leq x \leq K_1 \\ 0 & \text{if } K_1 \leq x \leq K_2 \\ D(x - K_2) & \text{if } K_2 \leq x \leq L_2 \\ L_{\$} & \text{if } x > L_2 \end{cases}$$

¹² 行使価格 K 、キャップ $L_{\$}$ 付のコールのペイオフを算式で記述すると次のとおりである。

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < K \\ D(x - K) & \text{if } K \leq x \leq L \\ L_{\$} & \text{if } x > L \end{cases}$$

¹³ 行使価格 K 、キャップ $L_{\$}$ 付プットのペイオフを算式で記述すると次のとおりである。

$$p(x) = \begin{cases} L_{\$} & \text{if } x < L \\ D(K - x) & \text{if } L \leq x \leq K \\ 0 & \text{if } x > K \end{cases}$$

¹⁴ 行使価格 K 、キャップ $L_{\$}$ 付ストラドルのペイオフを算式で記述すると次のとおりである。

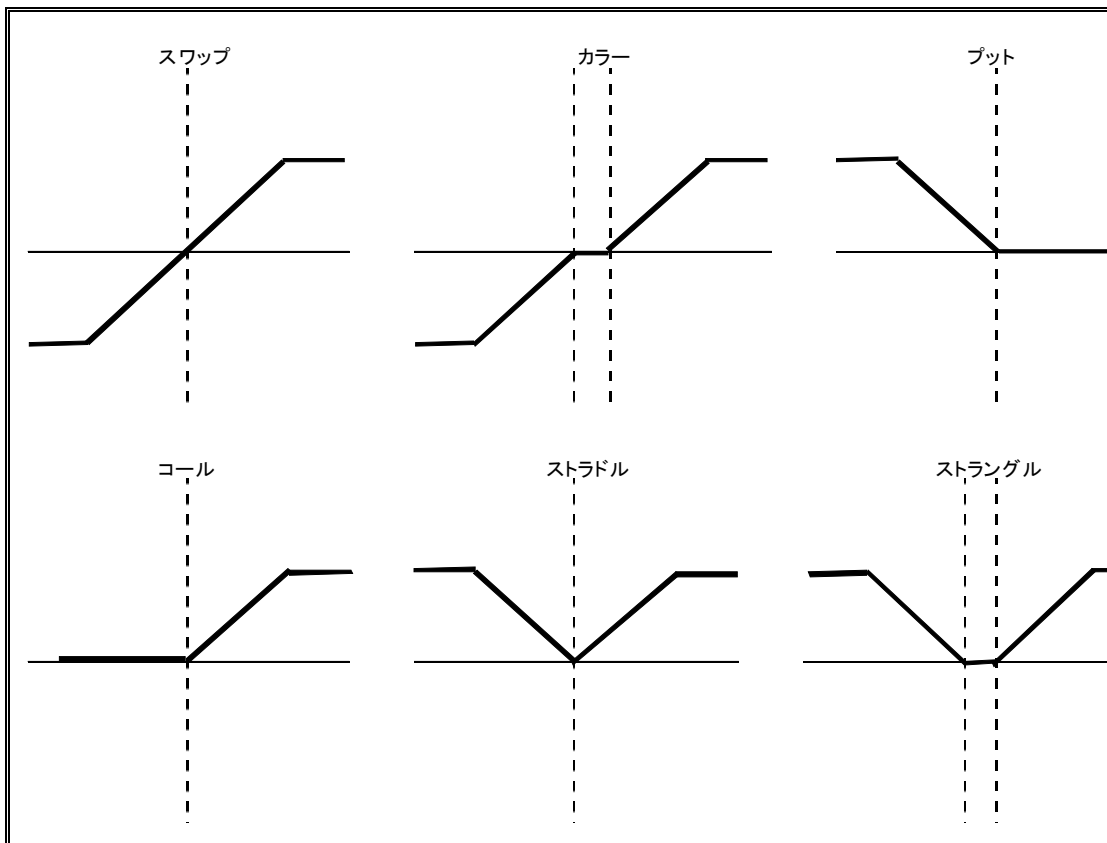
$$p(x) = \begin{cases} L_{\$} & \text{if } x < L_1 \\ D(K - x) & \text{if } L_1 \leq x \leq K \\ D(x - K) & \text{if } K \leq x \leq L_2 \\ L_{\$} & \text{if } x > L_2 \end{cases}$$

¹⁵ 行使価格 K_1 と K_2 、キャップ $L_{\$}$ 付ストラングルのペイオフを算式で記述すると次のとおりである。

$$p(x) = \begin{cases} L_{\$} & \text{if } x < L_1 \\ D(K_1 - x) & \text{if } L_1 \leq x \leq K_1 \\ 0 & \text{if } K_1 \leq x \leq K_2 \\ D(x - K_2) & \text{if } K_2 \leq x \leq L_2 \\ L_{\$} & \text{if } x > L_2 \end{cases}$$

これらのデリバティブ取引にキャップ等を付けたもののイメージを図示すると、図表7のとおりである。

図表 7 主なデリバティブ（ペイオフ）のイメージ図



(出典：Jewson and Brix with Ziehm, Weather Derivative Valuation)

4. 基本的な天候デリバティブの価格理論

一般的に、保険商品の価格評価方法には数理的理論による手法(Actuarial Method)、金融商品のデリバティブの価格評価方法には裁定価格理論による手法 (Arbitrage Method) が用いられている。本節では、これらの理論の天候デリバティブの価格評価への適用について述べる。

(1) 数理的理論

過去の天候にかかわる統計データをもとに、例えば、次のとおり数理的理論による手法を適用することによって、天候デリバティブの価格を求めることができる。

a. バーン分析 (Burn analysis)

過去のデータをもとに直接 HDD や CDD の値を計算し、平均や分散などの基礎数

値を求める手法である。これらの基礎数値をもとに天候デリバティブの価格を算出する。簡潔で計算が簡単であるという利点がある。

b. インデックスモデリング

バーン分析をもとに統計的モデルを作成して天候デリバティブの価格を算出する方法である。例えば HDD の場合の手順は次のとおりである。

- ① 日々の最高温度 (T max) と最低温度 (T min) を求める。
- ② 日々の HDD の価格を算出する。
- ③ HDD の総合計値を計算する。
- ④ キャッシュフローの支出を計算する。

典型的なモデリングの方法は、パラメータ方式 (Parametric distributions) とノンパラメータ方式 (Non-parametric distributions) の 2 つに分類される¹⁶。

c. デイリーモデリング

正確性が増すといわれているデイリーモデリング (Daily modeling) には、自己回帰移動平均 (Autoregressive on moving average : 以下「ARMA」) モデルなどの時系列モデルが用いられている¹⁷。

デイリーモデルの利点は次のとおりである。さらに、これらのモデルにより、シミュレーションも可能である。

- 過去のデータを一層活用できる。
- 一層正確な計算を行える。
- 首尾一貫してモデルを適用できる。
- 気象予想との親和性が高い。

(2) 裁定価格理論

a. 裁定価格理論について

株式を現契約とするオプションの価格については、有名なブラック・ショールズ式のように、裁定価格理論によって価格が一意的に定まることが知られている¹⁸。

この裁定価格に理論について簡単に説明すると、市場が公平で流動性が高ければ裁定取引はなりたたない (no arbitrage)、ただ飯を御馳走になる機会はない (no free

¹⁶ 詳細は補足資料 B を参照願う。

¹⁷ 詳細は補足資料 C を参照願う。

¹⁸ Black Scholes 式については、補足資料 D を参照願う。

lunch) ということである。この裁定取引が成立しないという前提のもとに、オプションの価格が一意的に決まる。

この裁定価格理論の説明にはいろいろな方法が発見されているが、まずは、分かりやすい方法である複製 (duplication)¹⁹ ポートフォリオの考え方によって説明する。複製する金融商品の市場価格が常に一意に決まっている場合には、複製されたデリバティブの価格も複製する金融商品の価格によって一意に決定することになる。例えば、流動性があり常に市場価格を有する株式のオプションは、リスクフリー債券と当該株式の組み合わせにより複製ポートフォリオができるので、このオプションは一意的に価格が定まる。全てのリスク商品がある自己充足的 (self-financing)²⁰ な取引によって複製されるとき、市場は完備 (complete) であるという。

オプションなどのデリバティブの価格はリスク中立測度 (risk neutral measure) によっても求めることができる。市場に裁定機会が存在しなければ、完備であることと、リスク中立測度が一意的に定まることは同じである。このリスク中立測度を適用することによって、デリバティブの価格は一意的に定めることができる。

b. オプション価格算出の具体例

オプション算出方法について、単純化された効率的な株式市場を仮定して説明する。ある会社の株式を 100 円で購入し、1 年後にこの会社の事業が成功したら 10 円増えて 110 円になり、事業が失敗したら 10 円減って 90 円になるとする。期間 1 年の国債利回りは 5% とする。この会社の事業が成功するか失敗するか不明であるが、市場は効率的であるため、株式や債券は頻繁に取引されているものとする。

この株式の一年後の価格についてのオプション料を求める。行使価格は 100 円とする。このオプションでは、1 年後に事業が成功した場合にはコールを行使し 10 円の利益、事業が失敗した場合はコールを行使せず、損失は発生しないことになる。

(a) 複製ポートフォリオによる方法

このオプション料を複製ポートフォリオの考え方によって算出する。

このオプションを複製するため、債券 100 円、株式 50 円を購入する。手元資金は 100 円だったので、50 円はリスク・フリー・レート 5% で借入れる。

この複製ポートフォリオは図表 8 のとおり、1 年後に株式が上昇する場合、株式は 55 円、債券は 105 円となり複製資産の計は 160 円で、借入金 50 円を控除して、合計で 110 円と 10 円増加する。1 年後に株式が下落する場合、株式は 45 円、債券は 105 円となり複製資産の計は 150 円で、借入金 50 円を控除して、合計が 100 円で増減は

¹⁹ ある金融資産のキャッシュフローと同じキャッシュフローを生成するポートフォリオが存在するとき、このポートフォリオは当該金融資産を複製するという。

²⁰ 複製ポートフォリオの組替に際して、新たな資金の流入がないポートフォリオを自己充足的 (self-financing) という。

ない。従って、この株式と資産の複製によって、株式上昇時は 10 円の利益、株式下落時には損失なしというコール・オプションと同様のペイオフを有する商品を合成できたことになる。

なお、借入金 50 円にかかる利息 2.5 円 (= 50 円×5%) が発生する。これが正にオプション料であり、1 年前の購入時に支払うとすると、2.38 円 (=2.5 円÷105%) となる。

図表 8 オプションの複製ポートフォリオ

			現金 (借入)	複製資産			合計
				株式	債券	計	
購入時			- 50 円	50 円	100 円	150 円	100 円
1 年後	株式	上昇	- 50 円	105 円	55 円	160 円	110 円
		下落	- 50 円	105 円	45 円	150 円	100 円
	利息		- 2.5 円	—	—	—	—

(b) リスク中立測度による方法

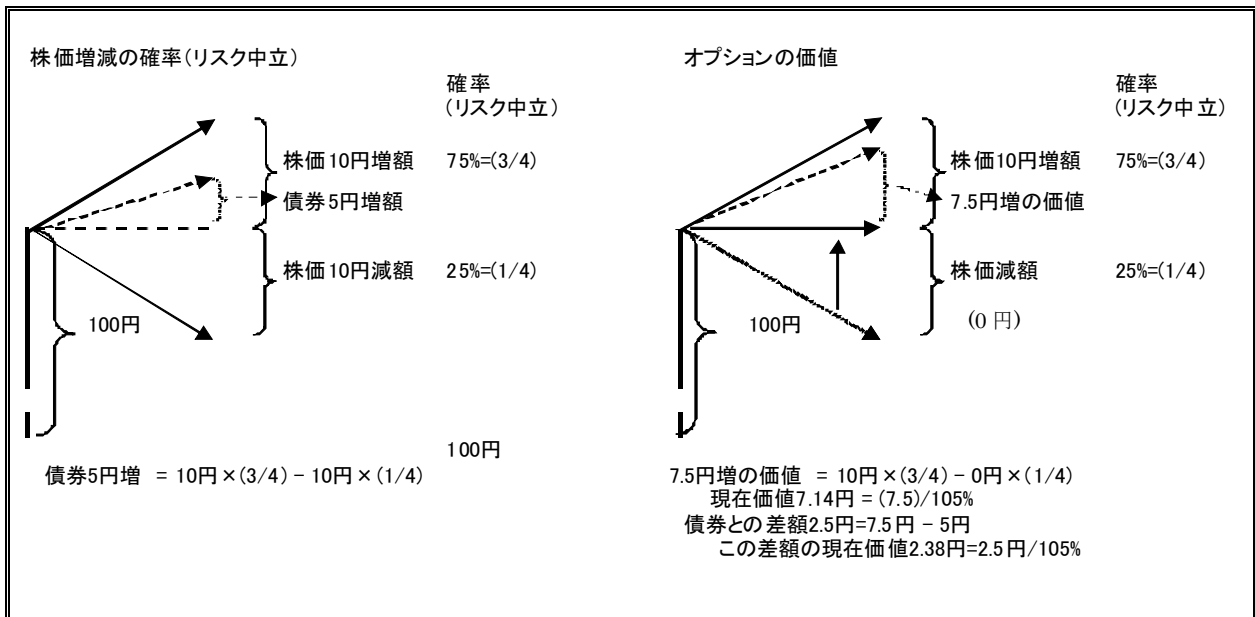
オプション料をリスク中立測度による方法で説明する。市場は効率的であるため、裁定取引 (arbitrage) の機会はないとする。コイン投げの表や裏がでる確率のように、株式が上昇する確率がそれぞれ同等で 1/2 と 1/2 という単純な推定は成り立たない。

この場合には、株価が 10 円増加する確率は 3/4、株価が 10 円減少する確率は 1/4 であることが推定される。何故なら、裁定取引が成り立たない (no arbitrage : no free lunch) ことから、この会社の株式購入の期待値は、リスクフリーである国債で運用した場合の元利合計 105 円 (=100 円×(100%+5%)) と一致すべきであるからである。株価の期待値が 5 円増額するためには、 $5 円 = 10 円 \times 3/4 - 10 円 \times 1/4$ となるべきである。

株式のコール・オプションの購入を考える (1 年後に、行使価格 100 円とする)。株価が 10 円増加すれば株式と同様に 10 円利益を得られるが、株価が 10 円減額した場合には損失 0 円となる。この場合のコール・オプションの価値は 7.5 円、リスクフリー債券との差額が 2.5 円である。なお、これらの説明については、図表 9 を参照願う。

このように、「裁定機会がない」という条件がなければ、株価が増加する確率は 1/2 と思われていたが、この条件によってリスク中立な確率である 3/4 を適用すべきであることが判明した。このことを確率の測度変換という。この測度変換によりオプションの価格も簡単に求めることができた。

図表9 リスク中立の例



(出典：拙著“保険商品の価格（予測と調整）”)

c. 天候デリバティブの価格の非完備性

天候デリバティブの価格を裁定価格理論により一意的に定めることができないことが知られている。この自己充足的な複製ポートフォリオを構築することができない。一部で CME などに天候デリバティブ関連の商品が上場しているものの、取引量、取引回数などが十分でない。これは、十分に流動性があり公正な市場価格が瞬時に決まるとは言えない非完備な市場にある。

将来において、天候デリバティブの市場が完備となれば、株式のデリバティブのように裁定理論に基づくプライシングが可能となる。しかしながら、現時点では統計的データによるプライシングが主流である。なお、変動要素の大きい気象現象を過去のデータから単純に予測することは簡単ではないため、過去のデータをベースに様々な工夫が施されている。

5. 天候デリバティブ価格評価のための工夫

前節で述べたとおり、天候デリバティブの市場が完備でないため裁定理論によって価格を評価することは現時点では困難である。しかしながら、擬似的に裁定理論を適用する方法、均衡理論を活用する手法なども検討されている。

(1) 数理的理論のための工夫

数理的手法の適用にあたり、例えば、ポートフォリオなどが考慮されている。

天候デリバティブを引受けるにあたり、単独契約ではなく複数の契約のポートフォリオを考えてリスクを減らすことが重要である。リスクが減少すれば、価格の安全率も少なく済む。例えば、2 契約でポートフォリオを組む場合、平均は両者の和であるが、リスクである分散は軽減する²¹。

(2) 裁定理論適用のための工夫

非完備な天候デリバティブの市場における価格評価について、例えば、ゲーマン²²は、効用関数を用いる方法、電力契約で天候デリバティブをヘッジするなどの方法を提案している。ここでは、均衡理論、相関のある資産の活用、最適ポートフォリオの活用などを以下のとおり紹介する。

a. 均衡理論

カオとウェイは、代表的投資家の効用関数を用いた均衡理論を天候デリバティブの価格評価に適用した²³。この効用関数を適用することにより、代表的投資家の期待効用を最大化する価格として、天候デリバティブの価格を算出することが可能となる。

b. 相関のある資産の活用

デイビスは、ガス取引ビジネスが気象リスクに直面した場合を想定して、その期待効用を最大化するために天候デリバティブを活用することを検討した。

ガスの消費量と HDD に相関性があることに着目し、両者が線形関係にあると仮定した。市場のあるガス資産を基準として、気象リスクを扱うオプション取引の相対価格を定式化することにより、天候デリバティブの価格評価を行っている。

このモデルでは、市場で天候デリバティブの対象となる気象要素の取引がなくとも、それと相関のある取引可能な資産（ポートフォリオ）があり、それを市場参加者が自由に取引できるとすれば、その価格を基準として天候デリバティブにも裁定価格理論を適用できることを示唆している²⁴。

c. 最適ポートフォリオの活用

プラトンとウェストは、最適成長率ポートフォリオ（Growth optimal portfolio : 以下「GOP」）をニューメレール（numeraire）²⁵とし、この期待成長率が市場において最適となるようなポートフォリオにより天候デリバティブの価格評価を行うことを提

²¹ 資産 a と資産 b の平均は合計に等しいが、 $\rho \leq 1$ であるところから分散（＝リスク）が減少する。

$$\begin{aligned} \text{平均} \quad \mu_{a+b} &= \mu_a + \mu_b \\ \text{分散} \quad \sigma_{a+b}^2 &= \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2\rho\sigma_a\sigma_b \end{aligned}$$

²² H.Geman, “The Bermuda Triangle: Weather, Electricity and Insurance”(1999)

²³ Cao and Wei の理論の詳細は補足資料 E を参照願う。

²⁴ Davis の理論の詳細は補足資料 F を参照願う。

²⁵ 価値の基準となる財のことをいう。

示した²⁶。

GOP というニューメレールを用いることによって、数理ファイナンスの手法であるリスク中立測度による価格と、保険数理の手法による価格が統合されたとも言われている。

d. 天候スワップの活用

ジュウソンとゼルボスは、比較的市場に流動性のある天候スワップによって、天候オプションなどの他の天候デリバティブを評価することを提案している²⁷。

(3) 気象学的予測の活用

天候デリバティブは気象現象をベースとすることから、過去の気象データを分析して数理的に評価する方法や裁定理論によって評価する方法のほかに、将来の気象予測を天候デリバティブの価格評価に取り入れることは重要である。

a. 気象予測

過去のデータをもとに天候デリバティブの価格を求めるだけでなく、気象予測に基づく将来の予測値を天候デリバティブの価格評価に反映する。気象理論の発達、観測技術の向上、スーパーコンピュータを活用したシミュレーションモデルの精緻化などにより、気象予測の精度は益々向上することが期待される。過去のデータと将来の予測値を複合して利用することにより、天候デリバティブの価格も一層精度が高まることが期待できる。

b. 気象の季節性

気象現象は季節によって変動があるのでこれを反映した天候デリバティブの価格を評価する。

例えば、春、夏、秋、冬といった季節性を反映した周期のある関数を利用した気温予測モデル²⁸なども考えられている。

c. エルニーニョ等の反映

数年に一度発生するエルニーニョ等が気象現象に与えるインパクトは大きい。エルニーニョ等の予測精度を高めるとともに、これが気象現象に及ぼす影響を十分予測し、天候デリバティブの価格を評価に反映することも重要である。

²⁶ Platen and West の理論の詳細は補足資料 G を参照願う。

²⁷ Stephen Jewson and Mihail Zervos, “No-Arbitrage of Weather Derivatives in the Presence of a Liquid Market” (2005.5.25) などを参照願う。

²⁸ Fourier 級数などが活用されている。

6. 大規模自然災害と損害保険

前節までは気象現象のうち、気温などの天候変化と天候デリバティブを中心にみてきた。これらのほかに、損害保険と大きく関係のある気象現象には、大規模自然災害 (Natural Catastrophe) がある。本節では、大規模自然災害に関する損害保険等のカバー等について紹介する。

(1) 大規模自然災害の状況

洪水、暴風、地震、森林火災、寒波などの大規模自然災害による犠牲者や損害額は巨大である。Swiss Re の“Sigma, Natural catastrophes and man-made disasters in 2007”によると図表 10 のとおり 2007 年における世界の自然災害の件数は 142 件、犠牲者は 14,630 人、保険損害額は約 233 億ドルにのぼる。

また、日本における大規模自然災害による被害総額をみると、気象変動監視レポートによると、図表 11 のとおり 2007 年は 650 億円、農業被害の大きかった 2004 年の被害総額は約 5,000 億円と膨大な金額であった。

図表 10 世界の自然災害

	件数	構成割合	犠牲者	構成割合	保険損害額	構成割合
自然災害	142	42.4	14,630	67.9	23,269	84.4
洪水	53		5,798		6,022	
暴風	57		6,729		14,318	
地震	9		636		437	
干ばつ、森林火災、熱波	7		745		1,310	
寒波、霜	10		487		940	
雹	3		7		242	
津波	1		152			
その他	2		76			
人災	193	57.6	6,923	32.1	4,295	15.6
合計	335	100.0	21,553	100.0	27,564	100.0

(出典： Swiss Re, “Sigma, Natural catastrophes and man-made disasters in 2007”)

図表 11 2000 年から 2007 年の日本の気象災害の推移

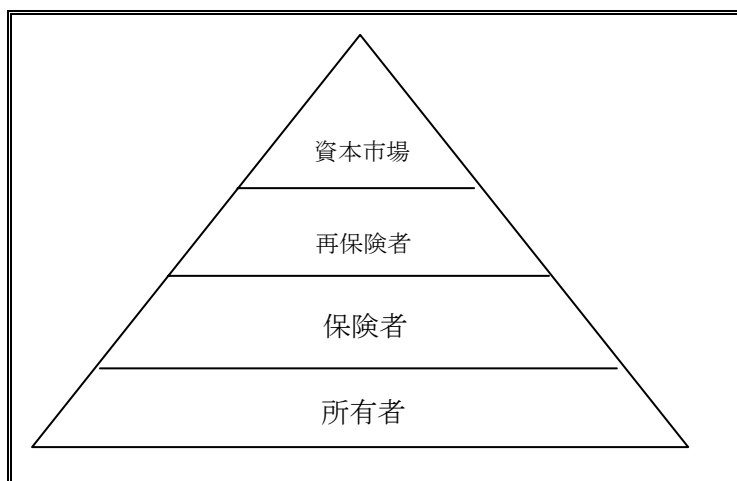
	死者・ 行方不明	住家損壊	住家浸水	被害総額 (単位：億円)			
				農業被害	林業被害	水産業被害	合計
2000 年	63	1,755	82,585	433	203	67	703
2001 年	110	1,804	12,936	516	209	33	758
2002 年	85	2,919	16,194	809	171	86	1,066
2003 年	145	3,123	16,148	2,778	205	89	3,072
2004 年	327	103,458	172,504	2,964	1,362	598	4,924
2005 年	222	10,064	27,323	649	534	62	1,245
2006 年	259	17,080	14,684	451	190	356	997
2007 年	153	2,782	10,542	401	193	56	650

(出典：気候変動監視レポート 2007：気象庁)

(2) 大規模自然災害のリスク管理者

大規模自然災害に対するリスク管理の関係者は図表 12 のとおり 4 層構造である。即ち、①所有者、②伝統的な保険者による保険補償の提供、③再保険者によるこの保険者の引受保険リスクの転嫁、④CAT Bond などの資本市場からの資金の調達に 4 層構造をなしている。

図表 12 リスク管理の関係者



(出典：Patricia Grossi, Howard Kunreuther, “Catastrophe Modeling”

の Key private sector stakeholders in the management risk
をもとに作成)

(3) 再保険

保険者が引受けた大規模自然災害リスクのうち、自己が保有できないリスクについては再保険に出再する。

再保険は、責任分担方式によって分類するとプロポーショナル再保険とノン・プロポーショナル再保険がある。プロポーショナル再保険は、出再者の保有保険料と出再保険料との比率が、保有責任額と出再責任額の比率と同一である再保険形態である。これに対して出再保険者が、元受契約の条件に依存せずに、元受保険者の保有損害額を超過する部分につき、約定した金額を上限として再保険責任を負う形態がノン・プロポーショナル再保険である。

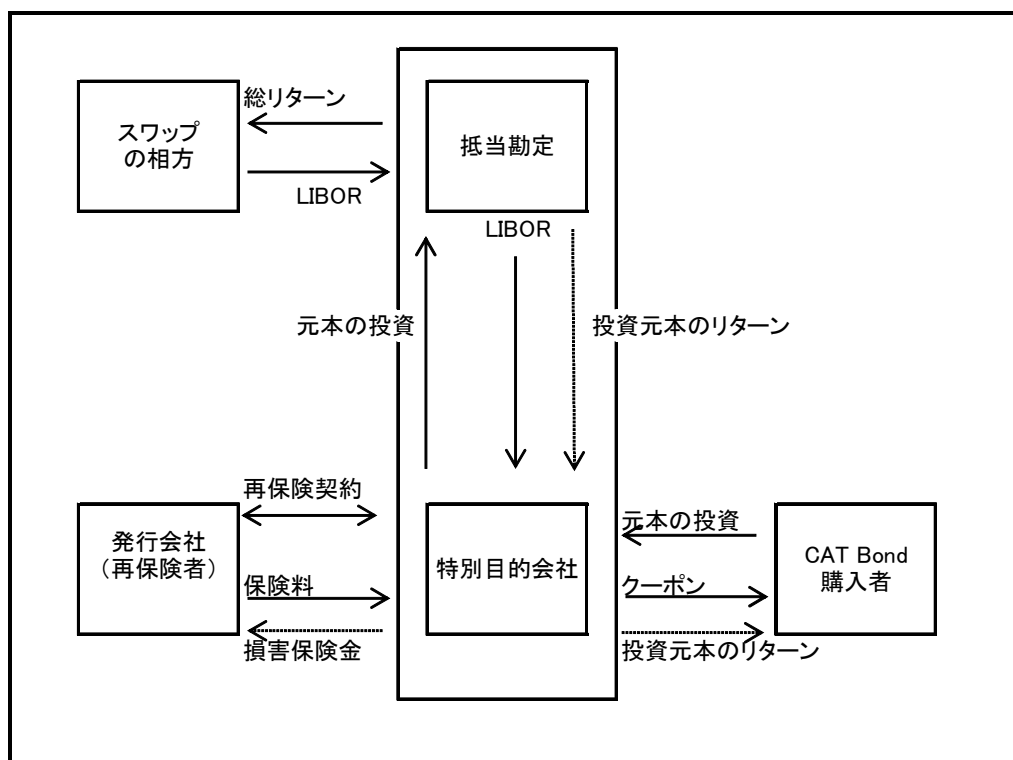
ノン・プロポーショナル再保険の代表的なものが ELC (Excess of Loss Cover) である。ELC では、通常想定できる損害に対処するためのワーキング・カバー (Working Cover) と通常想定し得ない異常損害に対処するためのカタストロフィー・カバー (Catastrophe Cover) に分かれる。後者はキャット・カバー (CAT Cover) とも呼ばれ、大規模災害の再保険に利用される。

(4) 資本市場

再保険を補完するリスクの転換手段として、金融・資本市場にリスクを転換する CAT Bond などがある。また、シカゴ商品取引所（Chicago Board of Trade：以下「CBOT」）には PCS（Property Claims Services）Catastrophe Insurance Options が 1992 年 12 月から上場されている。

典型的な CAT Bond 発行の仕組みは図表 13 のとおりである。CAT Bond の発行会社は特別目的会社（special purpose vehicle）と保険リスクを投資リスクに転換する再保険契約を締結する。発行会社は、事故が発生した場合に損害を支払ってもらう対価として保険料を特別目的会社に支払う。特別目的会社は補償の資金を手当てするため CAT Bond を発行する。CAT Bond を購入した投資家は LIBOR（London Inter Bank Offered Rate：ロンドン銀行間貸出レート）などのリスクフリー・レートにリスクプレミアムを加えたクーポンを受取る。事故が発生した場合には、その損害額に相当する投資家へのリターンが減少する。CAT Bond によって集めた資金は、抵当勘定に預け入れ高格付の証券で運用する。即ち、高格付のカウンターパートと LIBOR でスワップする。この CAT Bond の利回りは事故の発生する確率等によって決まる。

図表 13 CAT Bond の仕組み



(出典：Patricia Grossi, Howard Kunreuther, "Catastrophe Modeling" の Typical securitization structure をもとに作成)

(5) 政府の役割

大規模自然災害に対しては、国によっては、政府が民間の保険市場や資本市場で賄えない部分を補償する最後の砦としての役割を担っている。主なものは図表 14 のとおりであるが、以下のとおりフランス、スペイン、米国の例を紹介する。

(a) フランス

フランスには、Cat Nat (Catastrophe Naturelles) という自然災害補償制度がある。民間保険会社は元受保険契約を引受の窓口となり、法律により強制的な引受義務がある。民間再保険会社は、政府の成立する再保険公庫 (la Claisse Centrale de Reassurance : 以下「CCR」) に出再することができる。巨大損害等により財源が枯渇しても政府が公的資金を注入する無制限の財務保証が CCR に与えられている。民間保険会社は、CCR に再保険する権利はあるが民間の再保険市場に出再することもできる。CCR に再保険する場合には、リスクを過半数は CCR に出再しなければならない。

(b) スペイン

スペインでは、公的機関が自然災害補償の保険を直接提供している。国営団体 (Consortio de Compensacion de Seguros : 以下「Consortio」) が保険の元受を行い、民間保険会社に保険販売、毎月の保険料徴収、保険金支払などの実務を委託している。民間保険会社は徴収保険料の 5% を手数料として受け取る。Consortio は政府からの無制限の財務保証を受けている。

(c) 米国

米国には、連邦洪水保険制度 (National Flood Insurance Program : 以下「NFIP」) があり、連邦保険局 (Federal Emergency Management Agency : 以下「FEMA」) が運営している。NFIP では、WYO プログラム (Write Your Own Program) により、民間保険会社は自社の名前で FEMA の洪水保険を販売する。保険金の支払額が保険料を上回った場合には、差額を FEMA が補償する。なお、住民が属する自治体が NFIP に参加していることが保険引受の前提となる。

図表 14 政府のサポート

国名	政府の役割
米国	大半の民間の財産保険は風災を補償するが、洪水は通常補償対象外である。連邦政府が洪水リスクを担保し、ハリケーン災害は民間保険会社が補償する。なお、フロリダではフロリダ・ハリケーン大規模災害基金に再保険している。
イギリス	民間の保険会社が洪水、風災、地盤沈下などの自然災害リスクを補償する。政府の補償制度はない。
フランス	民間保険における自然災害の補償は強制的であり、政府が定めた追加保険料（保険料の 12%）を支払う。風災も補償される。政府が定める CatNat というプログラムがあり、洪水、地盤沈下、地震、津波、雪崩などを補償しており、CCR によって運営されている。
ドイツ	自然災害リスクについては民間保険会社が任意で補償を提供している。政府の補償制度はない。
オランダ	民間保険会社が補償を提供していない洪水リスクについて、政府が補償を提供している。
スペイン	公的機関が自然災害保険を直接提供している。
オーストラリア	民間保険会社がほとんどのリスクに対する補償を提供しており、政府の補償制度はない。

(出典：ABI, Financial Risks of Climate Change などをもとに作成)

7. おわりに

私たちは地球の中で生活しており、この地球の大気現象である気象現象の影響を常に受けている。現実の気象現象を所与のものとして受け入れ、将来においては気象現象と人間関係が良好な関係となる様に努めること、気象現象によってもたらされるリスクについては経済的にヘッジすることが必要である。

本稿では、比較的短期の気象現象である天候デリバティブにかかわる気象現象、保険数理、金融商品の市場価値を評価する裁定理論などを中心に説明し、巨大自然災害についても保険、再保険、金融・資本市場、政府のリスクヘッジに基づく補償制度の役割について説明してきた。

気象現象は、気温や晴・曇・雨などの天候の動向、突然発生する台風、洪水などの大規模自然災害、周期的に発生するエルニーニョやラニーニャなどの影響の大きい気象現象、地球温暖化などの長期的な気象現象など、規模や時間軸が多様である。

まず望まれることは、気象現象を科学的に解明し将来の動向を的確に予測することである。これには、世界各国や日本の各種研究機関が、気象理論を一層精緻なものとする、観測データの精度の向上に努めること、スーパーコンピュータ等を駆使した予測モデルの精緻化に努めることが期待される。

次に、長期的には、気象現象が人間生活に負の影響を与えないように防止策を講じることである。例えば、地球温暖化を防止するために二酸化炭素の排出規制を行うこともこの一例である。また、短期的には、防災活動を整備し気象現象による災害等のリスクが生じないように予防すること、災害等が生じても損害を最小限に収められるように防止することである。

そして、気象現象によって生じる災害による経済的損害については、保険会社、金融市場、政府などが役割分担を行いながら協力して補償を提供することになる。この補償内容、補償水準、補償のキャパシティーについて、保険会社、金融市場、政府が如何なる補償を提供できるかが重要となる。保険会社としては、気象現象のリスクを分析・把握してこのリスクを保有するリスク量を見極めること、保有できないリスクについては再保険や CAT Bond などの形で金融市場にリスクをヘッジすること、また保険・再保険会社、金融市場で保有できないリスクについては政府のサポートを得ることが重要であると思料する。

補足資料 A. 基本方程式

A-1 運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla P + \nabla \phi + \mathbf{F}_r$$

ただし、 \mathbf{v} : 速度、 $\boldsymbol{\Omega}$: 回転の角速度、 \mathbf{F}_r : 摩擦力、 p : 圧力、 ρ : 密度

$$\phi : \text{ジオポテンシャル、} \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \mathbf{k}$$

上記算式を次の球座標系で表示すると以下のとおりとなる。

$$\text{球座標系 : } u = r \cos \theta \frac{d\lambda}{dt}, v = r \frac{d\theta}{dt}, w = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} - uv \frac{\tan \theta}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \theta - 2\Omega w \cos \theta + F_\lambda$$

$$\frac{dv}{dt} - u^2 \frac{\tan \theta}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \theta + F_\theta$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \theta + F_z$$

A-2 質量保存式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

上記算式を球座標系で表示すると次のとおりとなる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{1}{\alpha \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{\alpha \cos \theta} \frac{\partial v \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

A-3 状態方程式

$$P = \rho RT$$

ただし、 T : 温度、 R : 定数

A-4 熱力学の第一法則

$$dH = c_v dT + p d\alpha$$

ただし、 dH : 熱の増加、 c_v : 定容比熱、 $\alpha = 1/\rho$

上記算式に、状態保存式と質量保存式を適用して整理すると次のとおりとなる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \left(\frac{c_p}{c_v}\right) p \nabla \cdot \mathbf{v} - \left(\frac{\rho R}{c_v}\right) H$$

ただし、 c_p : 定圧比熱

補足資料 B. インデックスモデリング

B-1 パラメータ方式

パラメータ方式では、モーメント法や最尤法などでパラメータを推定したうえで、次の chi-squared, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk などのテストにより、実際のデータとモデルとの適合具合を検証する。

○chi-squared

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$$

○Kolmogorov-Smirnov

$$D = \max_x |F(x) - \hat{F}(x)| = \max_{x_i} |F(x_{(i)}) - i/N|$$

○Anderson-Darling

$$Q = \int \omega(x) (F(x) - \hat{F}(x))^2 dx$$

○Shapiro-Wilk

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^N \omega_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

B-2 ノンパラメータ方式

ノンパラメータ方式の一つにカーネル密度を用いる方法がある。カーネル密度方式では、未知の確率密度を複数の既知の確率密度の加重平均として推定する。

$$f(x) = \frac{1}{\lambda N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K\left(\frac{x - x_i}{\lambda}\right)$$

なお、カーネル K は確率密度である。 K が正規分布のときは次のようになる。

$$f(x) = \frac{1}{\lambda N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_i)^2}{2\lambda}\right)$$

補足資料 C. 時系列モデル

C-1 ARMA モデル

時系列モデルの一つである ARMA モデル（自己回帰移動平均モデル：Autoregressive moving average model）は、自己回帰モデルと移動平均モデルからなる。

B を戻り作用素（back-step operator）とすると

自己回帰部分 AR(p) : $\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i$ 、

移動平均部分 MA(q) : $\psi(x) = 1 + \sum_{i=1}^q \psi_i x^i$

自己回帰移動平均 ARMA(p,q) : $\phi(B)T'_i = \psi(B)\varepsilon_i$

$$(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i)T'_i = (1 + \sum_{i=1}^q \psi_i B^i)\varepsilon_i$$

$$T'_i - \phi_1 T'_{i-1} - \phi_2 T'_{i-2} - \phi_3 T'_{i-3} - \dots - \phi_p T'_{i-p} = \varepsilon_i + \psi_1 \varepsilon_{i-1} + \psi_2 \varepsilon_{i-2} + \dots + \psi_q \varepsilon_{i-q}$$

$$T'_i = \phi_1 T'_{i-1} + \phi_2 T'_{i-2} + \phi_3 T'_{i-3} + \dots + \phi_p T'_{i-p} + \varepsilon_i + \psi_1 \varepsilon_{i-1} + \psi_2 \varepsilon_{i-2} + \dots + \psi_q \varepsilon_{i-q}$$

C-2 ARFIMA モデル

ARMA モデルを改良した ARFIMA（Autoregressive fractionally integrated moving average）モデルは次のとおりである。

$$\phi(B)(1 - B)^d T'_i = \psi(B)\varepsilon_i$$

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k B^k$$

補足資料 D. ブラック・ショールズ式

ブラック・ショールズ (Black Scholes) 式を記述すると次のとおりである。

$$x N(d_+(T, x) - K \exp(-r_f T) N(d_-(T, x))$$

$$\text{ただし、} N \text{ は正規分布、} d_{\pm}(T, x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \right) [\log(x/k) + (r_f \pm \sigma^2)T]$$

ここでは、偏微分方程式により Black-Scholes を求めることとする。

時刻 t の株式の価格を S_t とし、Brown 運動 B_t に従うと仮定する。行使価格は K 。

Brown 運動とは次の条件を満たす、瞬間的な推移が正規分布となる確率過程である。

- (1) ほとんど確実に、 $B_t = 0$
- (2) $B_s - B_t$ は、 $N(0, s-t)$ の正規分布に従う、 $s > t$
- (3) 任意の n, m に対して、 $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ と $B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ は独立
- (4) サンプルパス $B(\omega, t)$ は連続

伊藤過程 (Ito Process) とは次の確率過程をいう。

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad t \geq 0$$

これを、微分形式で記述すると、 $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t, S_0 = x$

伊藤の補題 (Ito's Lemma)

伊藤過程 $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ に対して、 $Y_t = f(X_t, t)$ によって定まる過程も伊藤過程となり、次の関係を満たす。

$$dY_t = [f_x(X_t, t)\mu_t + f_t(X_t, t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X_t, t)\sigma_t^2] dt + f_x(X_t, t)\sigma_t dB_t$$

自己ファイナンス (Self Finance)

債権 (bond) の価格過程を $\beta_t = \beta_0 \exp(rt)$, $t \geq 0$ 、伊藤過程とみると、 $d\beta_t = \beta_t r dt$ となる。

株式 (stock) の伊藤過程を $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$

$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t a_\tau dS_\tau + \int_0^t b_\tau d\beta_\tau$$

Black-Scholes 公式 $C(x, t)$ を求める。

$Y_t = C(S_t, t)$, $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$ とし、伊藤の補題から、

$$dY_t = [C_x(S_t, t)\mu S_t + C_t(S_t, t) + \frac{1}{2}C_{xx}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2] dt + C_x(S_t, t)\sigma S_t dB_t$$

自己ファイナンス $Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t$ とする。

$dY_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t = (a_t \mu S_t + b_t \beta_t r_f) dt + a_t \sigma S_t dB_t$, r_f は無リスクの債権利回り

$a_t = C_x(S_t, t)$ となるように a_t を選ぶ。すると、 $b_t = \frac{1}{\beta_t} [C(S_t, t) - C_x(S_t, t) S_t]$

これらより、偏微分方程式 $C_t(S_t, t) + C_x(S_t, t) r_f S_t + \frac{1}{2} C_{xx}(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 = r_f C(S_t, t)$ が導か
ことができる。

期間 T 後に、行使価格 K とする。

上記偏微分方程式の境界条件は $Y_T = C(S_T, T) = (S_T - K)^+$ となる。

これは、熱電伝導方程式の初期値問題となり、解は次のとおりである。

$$C(x, t) = x N(d_+(T, x)) - K \exp(-rT) N(d_-(T, x))$$

$$\text{ただし、 } d_{\pm}(T, x) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \right) [\log(x/k) + (r \pm \sigma^2) T]$$

補足資料 E. 均衡理論による価格評価

Cao and Wei, “Pricing Weather Derivative: an Equilibrium Approach”に基づき、
均衡理論による天候デリバティブの価格評価理論の概要を紹介する。

代表的投資家の t 時点での効用関数は、 $U(c_t, t) = \exp(-\rho t) \frac{c_t^{\gamma+1}}{\gamma+1}$ とする。

時間選好率 $\rho > 0$ 、リスクパラメータ γ は $[-1, 0]$ の間の値
配当は、 $\ln \delta_t = \alpha + \mu \ln \delta_{t-1} + \alpha_\delta \epsilon_t$ 、 $\mu \leq 1$ とする。

平均気温のモデルは次のとおりとする。

$$U_{yr,t} = \sum_{i=1}^k \rho_i U_{yr,t-i} + \sigma_{yr,t} * \xi_{yr,t}$$

$$\sigma_{yr,t} = \sigma - \sigma_1 \left| \sin\left(\frac{\pi t}{365} + \phi\right) \right|$$

$$\xi_{yr,t} \sim \text{i. i. d. } N(0,1)$$

$$Y_r = 1, 2, \dots, 20 \text{ \& } t = 1, 2, \dots, 365$$

証券価格 $X_t = E_t \left(\sum_{\tau=t+1}^{\infty} \frac{U_c(c_\tau, \tau)}{U_c(c_t, t)} D_\tau \right)$ 、 D_τ は累積配当、 U_c は c による偏微分

$$\text{すると、リスクのない債権価格 } B(t, T) = \frac{1}{U_c(\delta_t, t)} E_t(U_c(\delta_T, T))$$

$$\text{満期時にペイオフ } qT \text{ がある偶発請求の価格 } F(t, T) = \frac{1}{U_c(\delta_t, t)} E_t(U_c(\delta_T, T) qT)$$

HDD のコールの価格は

$$C_{\text{HDD}}(t, T_1, T_2, X) = \exp[-\rho(T_2 - t)] \delta_t^{-\gamma} E_t[\delta_{T_2}^{-\gamma} \max(\text{HDD}(T_1, T_2) - X, 0)]$$

これは、上記 $B(t, T)$ によって次のとおりとなる。

$$C_{\text{HDD}}(t, T_1, T_2, X) = B(t, T_2) E_t[\max(X - \text{HDD}(T_1, T_2), 0)]$$

従って、配当過程と気温過程が独立の場合は、HDD コール・オプションの現在価値は将来のペイオフをリスク・フリー・レートで割り引いたものとなる。

補足資料 F. 相関のある資産の活用による価格評価

Davis, “Pricing Weather Derivative by marginal value”に基づき、相関関係のある資産の活用による天候デリバティブの価格評価理論の概要を紹介する。

累積 HDD は対数正規分布を X_t に従うとする。

$$\text{即ち、} dX_t = vX_t + \gamma X_t d\omega_1(t) \quad (1)$$

$$T \text{ では、} X_t = \exp(m(T) + \gamma d\omega_1(T)) \quad (2)$$

$$m(T) = \log X_0 + \left(v - \frac{1}{2}\gamma^2\right)T \quad (3)$$

ガスの単位時間あたりの販売、 $v(t)=v(X_t)$

ここでは、線形関係 $v(t)=\alpha X_t$ とする。

利益は $Y_t = \alpha X_t S_t$ 、 S_t はスポット価格で対数正規分布

すると、 $dS_t = \mu S_t dt + \alpha S_t d\omega_2(t)$ (4)

ブラウン運動 ω_1 と ω_2 の相関係数は $E[d\omega_1 d\omega_2] = \rho dt$

(1),(2),(3),(4)から、

$$dY_t = \theta Y_t dt + \xi Y_t d\omega(t), \quad Y_0 = \alpha S_0 X_0$$

$$\theta = v + \mu + \rho\sigma\gamma$$

$$\xi = \sqrt{\gamma^2 + \sigma^2 + 2\rho\gamma\sigma}$$

新たなブラウン運動は

$$d\omega(t) = \frac{1}{\xi}(v d\omega_1 + \sigma d\omega_2)$$

行使価格 $B(X_T)$ は、 T 時点のものである。

期待効用 $E[U(H_T)]$ を最大化する価格は Davis, “Option pricing in Incomplete Markets” によると次のとおりである。

$$\text{最適価格 } \hat{p} = \frac{E[U'(H_T^*)B(X_T)]}{V'(\eta)} B(X_T)$$

$$H_T^* \text{ は最適ポートフォリオ、} \eta \text{ エンドウメント、} V(\eta) = E[U(H_T^*)]$$

需要に応じて現在価格で販売すると、 $H_T^* = T$ 時点での利益 Y_T
 効用関数 $U(y) = \log y$ とすると、 $V(y) = \log y + \text{const}$ 、即ち $V'(y) = 1/y$
 この場合には次のとおりとなる。

$$\hat{p} = E\left[\frac{Y_0}{Y_T} B(X_T)\right]$$

ゼロコスト・スワップの 0 時点での利率を $\hat{r} = \exp[(v - \gamma^2 - \rho\gamma\sigma)T] X_0$

$Z_t = Y_0 / Y_t$ とすると

$$dZ_t = -rZ_t dt - \xi Z_t d\omega_t, \text{ なお } Z_0 = 1, r = \mu + v - \gamma^2 - \sigma^2 - \rho\gamma\sigma$$

最適価格 \hat{p} は次のとおりとなる。

$$\begin{aligned} \hat{p} &= E\left[\exp(-rT) \exp\left(\frac{-\xi^2 T}{2} - \xi\omega_T\right) B(X_T)\right] \\ &= E^Q[\exp(-rT) B(X_T)] \end{aligned}$$

なお、この新たな測度 Q は、 $\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\frac{-\xi^2 T}{2} - \xi\omega_T\right)$ で定める。

補足資料 G. 最適ポートフォリオの活用による価格評価

Platen and West, “Fair Pricing of Weather Derivative”に基づき、最適ポートフォリオの活用による天候デリバティブの価格評価理論の概要を紹介する。

$S_i^{(j)}$ は j 番目の証券の t_i 時点の価格とする。

$$h_i^{(j)} = S_i^{(j)} / S_{i-1}^{(j)}, S_i^{(j)} > 0 \quad (\text{それ以外は } 0)$$

$$\sum_{j=1}^d \pi_i^{(j)} = 1$$

$$h_m^{(\pi)} = \sum_{j=1}^d \pi_{m-1}^{(j)} h_m^{(\pi)}$$

$$\text{ポートフォリオの価値 } S_i^{(\pi)} = S_0^{(\pi)} \prod_{m=1}^i h_m^{(\pi)}$$

成長率 $g_i^{(\pi)} = E(\ln(h_{i+1}^{(\pi)}) | A_{t_i})$ を、自己ファイナンスポート・フォリオ・プロセス $S_i^{(\pi)}$ のポートフォリオ中で定義する。

$\underline{g}_i = \text{ess sup}_{S^\pi} g_i^{(\pi)}$ と定義する。

このとき、 $g_i^{(\pi)} = \underline{g}_i$ となるポートフォリオ $S_i^{(\pi)}$ が存在し、 $S_i^{(\pi)}$ を最適成長率ポートフォリオ (Growth Optimal Portfolio : GOP) という。

最適ポートフォリオは成長率の点でこれを超える他の正の自己ファイナンスポートフォリオが存在しないことから、最良のベンチマークポートフォリオといえる。

Hans Buhlmann and Eckhard Platen, “A Discrete Time Benchmark Approach for Finance and Insurance derivatives”によると、ポートフォリオ $S_i^{(\pi)}$ は、次の条件を満たすときに限り GOP である。

$$E\left(\frac{h_{i+1}^{(\pi)}}{h_{i+1}^{(\pi)}} \mid A_{t_i}\right) \leq 1, A_{t_i} \text{ は } t_i \text{ までに得られる情報}$$

GOP である $S_i^{(\pi)}$ をミューメールとするベンチマーク価格 $\hat{S}_i^{(\pi)} = \frac{S_i^{(\pi)}}{S_i^{(\pi)}}$ を定義する。

ポートフォリオ $\hat{S}_i^{(\pi)}$ は常に優マルティンゲールである。即ち、 $\hat{S}_i^{(\pi)} \geq E(\hat{S}_k^{(\pi)} | A_{t_i})$ 、 $t_i \leq t_k$ 、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$

価格過程 $u = \{u_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ が公正とは、ベンチマークされた過程

$\hat{u} = \left\{ \hat{u}_i = \frac{u_i}{S_i^{(\pi)}}, i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$ が、 (A, P) マルティンゲールであることである。

即ち、 $\hat{u}_i = E(\hat{u}_i | A_{t_i})$ 、 $t_i \leq t_k$ 、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$

ユーロピアン・コール・オプション $H_{t_n} = \text{Max}(S_n - K, 0)$

ベンチマークされた t_n 時点のペイオフ $\hat{H}_{t_n} = \frac{H_{t_n}}{S_n^{(\pi)}}$ とする。

このユーロピアン・コール・オプションの価格 $C_{H_{t_n}}(t_i)$ 、 $t_i \leq t_n$ を求める。

ベンチマーク公正価格は、 $\hat{C}_{H_{t_n}}(t_i) = E(\hat{H}_{t_n} | A_{t_i})$ (1)

両辺に $S_n^{(\pi)}$ を乗じると、公正価格の一般式は次のとおりとなる。この式は市場が非完備でも適用できる。

$$C_{H_{t_n}}(t_i) = S_i^{(\pi)} \hat{C}_{H_{t_n}}(t_i) \quad (2)$$

○ リスク中立アプローチにより公正価格 $C_{H_{t_n}}(t_i)$ を求める。

上記算式(1),(2)より

$$C_{H_{t_n}}(t_i) = E \left(\frac{S_i^{(\pi)}}{S_n^{(\pi)}} H_{t_n} | A_{t_i} \right)$$

測度 P と測度 Q は同値とする。

ラドンニコディム過程 $\Lambda = \{\Lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ 、 $\Lambda_i = \frac{S_i^{(0)}}{S_0^{(0)}} \frac{S_0^{(\pi)}}{S_i^{(\pi)}} = \frac{S_i^{(0)}}{S_i^{(0)}}$

測度 Q は、 $\frac{dQ}{dP} |_{A_{t_n}} = \Lambda_n$

$$\begin{aligned} C_{H_{t_n}}(t_i) &= E \left(\frac{\Lambda_n}{\Lambda_i} \frac{S_i^{(0)}}{S_0^{(0)}} H_{t_n} | A_{t_i} \right) \\ &= E \left(\frac{dQ}{dP} |_{A_{t_n}} \frac{S_i^{(0)}}{S_0^{(0)}} H_{t_n} | A_{t_i} \right) \\ &= E^Q \left(\frac{S_i^{(0)}}{S_0^{(0)}} H_{t_n} | A_{t_i} \right) \end{aligned}$$

- 一般数理手法によりにより公正価格 $C_{H_{t_n}}(t_i)$ を求める。この時、ペイオフ H_{t_n} と GOP である $S_n^{(\pi)}$ が独立と仮定する。

上記算式(1),(2)より

$$\begin{aligned} C_{H_{t_n}}(t_i) &= E\left(\frac{S_i^{(\pi)}}{S_n^{(\pi)}} H_{t_n} \mid A_{t_i}\right) \\ &= E\left(\frac{S_i^{(\pi)}}{S_n^{(\pi)}} \mid A_{t_i}\right) E(H_{t_n} \mid A_{t_i}) \end{aligned}$$

ゼロクーポンの公正価格 $P(t_i, t_n) = E\left(\frac{S_i^{(\pi)}}{S_n^{(\pi)}} \mid A_{t_i}\right)$ なので、

$$C_{H_{t_n}}(t_i) = P(t_i, t_n) E(H_{t_n} \mid A_{t_i})$$

例えば、この一般数理的手法を用いて CDD のヨーロピアン・コール・オプションの公正価格 $C_{H_{t_n}}(t_i)$ を求めると次のとおりとなる。

$$C_{H_{t_n}}(t_i) = P(t_i, t_n) \lambda E\left((P_{\underline{h}, \bar{h}}^c K)^+ \mid A_{t_i}\right)$$

$P_{\underline{h}, \bar{h}}^c = \sum_{h=\underline{h}}^{\bar{h}} CDD_h$ は、 \underline{h} 日から \bar{h} 日までの CDD の累積

$$(P_{\underline{h}, \bar{h}}^c K)^+ = \text{Max}((P_{\underline{h}, \bar{h}}^c K), 0)$$

<参考資料>

- ・ K.T.アリグッド、T.D.サウアー、J.A.ヨーク『カオス（力学系入門）』（2006.12.28）
- ・ NHK 放送文化研究所編『気象・災害ハンドブック』NHK 出版（2005,11,30）
- ・ 小倉義光『気象力学通論』東京大学出版会（1978.2.25）
- ・ 小倉義光『一般気象学（第2版）』東京大学出版会（1999.4.15）
- ・ 小倉義光『総観気象額入門』東京大学出版会（2000.8.25）
- ・ 気象庁『気候変動監視レポート 2007』（2008.3）
- ・ 木本昌秀『スーパーコンピュータを用いた気候システムの研究』スーパーコンピューティングニュース vol.8（2006）
- ・ 土方薫編著『天候デリバティブ』シグマベイスキャピタル（2000.5.10）
- ・ 住明正、寺沢敏夫、岩崎俊樹、遠藤昌宏、小河正基、戒崎俊一『数値地球科学』岩波書店（1997）
- ・ 田中博『偏西風の気象学』成山堂（2007.4.28）
- ・ 田中博『カオスの壁を越える天気予報の夢』電気学会誌（1997.9）
- ・ トーア再保険株式会社編『再保険 その理論と実務』損害保険事業総合研究所（1999.8.1）
- ・ ドバネー『カオス力学系入門 第2版』共立出版（1990.10.10）
- ・ 吉澤容一『保険商品の価格（予測と調整）』損害保険事業総合研究所（2008.3）
- ・ 吉野正敏監修『日本の気候』二宮書店（2002.11.25）
- ・ 若浦正嗣『ウェザーデリバティブの価格決定とその方向』（2005.2.15）
- ・ ローレンツ『ローレンツ カオスのエッセンス』共立出版（1997.9.25）
- ・ ABI, “Financial Risks of Climate Change”（2005.6）
- ・ Black, F and Scholes, M. “The Pricing of Option and Corporate Liabilities’（1973）
- ・ Hans Buhlmann and Eckhard Platen, “A Discrete Time Benchmark Approach for Finance and Insurance derivatives”（2002.3.26）
- ・ M.Cao and J. Wei, “Equilibrium Valuation of Weather Derivatives”（2000）
- ・ M. Davis, “Option Pricing in incomplete markets”（1998）
- ・ M. Davis, “Pricing weather derivatives by marginal value”（2000）
- ・ Darrell Duffie D. ‘Dynamic Asset Pricing Theory’（1992）
- ・ H. Geman, “The Bermuda Triangle: Weather, Electricity and Insurance”（1999.9）
- ・ Patricia Grossi, Howard Kunreuther, “Catastrophe modeling : A new approach to managing risk”（2005）
- ・ J.Michael Harrison and David M.Kreps, ‘Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Market’, Journal of Economic Theory（1979）
- ・ J.Michael Harrison and Stanley R.Pliska ‘Martingale and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading’, Stochastic Processes and their Application 11（1981）
- ・ James R.Holton, “an introduction to DYNAMIC METEOROLOGY (Fourth Edition)”（2004）
- ・ Stephen Jewson and Anders Brix with Christine Ziehm, “Weather Derivative Valuation”（2005）

- ・ Stephen Jewson and Mihail Zervos, “No-Arbitrage of Weather Derivatives in the Presence of a Liquid Market” (2005.5.25)
- ・ Edward N.Lorenz, “Deterministic Nonperiodic Flow”(1962)
- ・ Robert C. Merton, ‘Continuous-Time Finance’ (1990)
- ・ Eckhard Platen and Jason West, ”Fair Pricing of Weather Derivatives” (2004.7.2)
- ・ Bernt Øksendal, ‘Stochastic Differential Equations’, (3rd edition) (1991)
- ・ Steven E.Shreve, ‘Stochastic Calculus for Finance II , Continuous-Time Model ’ (2004)
- ・ Swiss Re, “Sigma, Natural catastrophes and man-made disasters in 2007”(2008)
- ・ Jason West, “Benchmark Pricing of Weather Derivatives” (2002.12.3)

<参考サイト>

- ・ 気象庁 <http://www.jma.go.jp/jma/index.html>
- ・ 東京大学気候システム研究センター <http://www.ccsr.u-tokyo.ac.jp/>
- ・ AIR <http://www.air-worldwide.com/>
- ・ Munich Re <http://www.munichre.com/>
- ・ RMS <http://www.rms.com/>
- ・ Swiss Re <http://www.swissre.com/>