

極値事象のリスク管理

ーカタストロフィ（CAT）と極値理論（EVT）などー

主席研究員 吉澤 容一

目 次

1. はじめに
2. カタストロフィ（CAT）リスクと規制
 - (1) カタストロフィ（CAT）リスク
 - (2) ソルベンシー規制の取扱い（ソルベンシーⅡ）
3. リスク評価方法の課題
 - (1) リスク測度の課題
 - (2) リスク計量モデルの課題
4. 極値理論（EVT）
 - (1) 背景
 - (2) 最大値の分布
 - (3) 閾値超過の分布
 - (4) 多変数の最大値の分布
5. 極値事象のリスク管理のあり方
 - (1) 極値理論（EVT）の実践
 - (2) シナリオと極値理論（EVT）などの活用
 - (3) 極値事象のリスク管理の課題
6. おわりに

1. はじめに

先進的なソルベンシー規制の導入などの流れの中で、保険会社のリスク管理の重要性が従来にも増して認識されている。本稿では、保険会社のリスク管理のうち、損害保険事業において影響が特に大きいといわれている巨大災害などの極値事象（Extremal events）のリスク管理について、定量的リスク管理（Quantitative Risk Management）を中心に紹介する。

第2章では、カタストロフィ（CATastrophe：以下 CAT）事象の事例や、これに関するソルベンシーⅡなどの規制の動向について紹介する。第3章では、リスク評価方法の課題について整理する。極値事象を始めとするリスクを計量するリスク測度（risk measure）について、必要要件および現行で幅広く利用されているバリュー・アット・リスク（Value at Risk：以下 VaR）などのリスク測度の課題等について触れる。第4章では、極値事象を分析するための数理的手法についていくつか紹介する。これらは、極値理論（Extreme Value Theory：以下 EVT）と呼ばれる考え方である。リスクの最大値（maxima）の分布や閾値（threshold）の超過分布について、その特徴を分析することによりリスク評価に活用できる。第5章では、極値事象のリスク管理のあり方について考察する。なお、第3章および第4章などでは主に数理的な事象を取扱っている。これらの専門的な説明は補足資料に掲載しているので、必要に応じて参照願う。

2. カタストロフィ（CAT）リスクと規制

(1) カタストロフィ（CAT）リスク

極値事象の代表事例である CAT 災害には、自然（Natural）災害と人為（Man Made）災害がある。なお、これら以外にも、先般の金融危機のような金融に起因するシステムミック・リスクなどの極値事象も発生している¹。

CAT 災害の特徴は、1 件あたりの損害額が大きいこと、発生件数が少ないため大数の法則が働きにくいことなどが特徴である。

a. カタストロフィ（CAT）災害とリスク量

CAT 災害は、大別して自然災害と人為災害に分けられる。自然災害とは、洪水、暴風雨、地震、干ばつ、森林火災、ヒートウェイブ、冷害、凍結、雹、津波などである。人為災害とは、大規模な火災・爆発、航空災害、海上災害、鉱山災害、建物・橋梁の崩壊、社会的動乱、テロなどである。スイス再保険のシグマによると、2009 年の CAT 災害の状況は図表 1 のとおりであり、甚大なる損害をもたらした。自然災害は、133 件で全体の 46.2%、被災者数は 8,977 人で 60.2%、物損害の保険金支払額は 22,355

¹ システムミック・リスクなどの金融分野の極値事象も CAT 災害に含める考え方もあるが、本稿では、CAT 災害は自然災害と人為災害に限定する。

百万ドルで 85.1%である。人為災害は、155 件で全体の 53.8%、被災者数は 5,939 人で 39.8%、物損害の保険金支払額は 3,915 百万ドルで 14.9%である。

図表 1 カタストロフィ（CAT）災害の規模

	件数		被災者		保険金支払額（物損害のみ）	
	（件）	割合	（人）	割合	（USD m）	割合
自然災害	133	46.2%	8,977	60.2%	22,355	85.1%
洪水	46		2,696		1,667	
暴風雨	51		3,188		13,548	
地震	12		1,699		609	
干ばつ、森林火災、ヒートウェーブ ²	8		603		1,748	
冷害、凍結	6		538		586	
雹	8		20		4,197	
津波	1		190			
その他	1		43			
人為災害	155	53.8%	5,939	39.8%	3,915	14.9%
大規模な火災、爆発	30	10.4%	756	5.1%	1,605	6.1%
工場、倉庫	14		134		1,245	
石油、ガス	3		11		140	
百貨店	1		29			
その他建物	11		449		220	
その他の火災、爆発	1		133			
航空災害	15	5.2%	783	5.2%	752	2.9%
衝突	11		783		285	
宇宙	4		0		467	
海上災害	39	13.5%	2,146	14.5%	1,359	5.2%
旅客船	35		2,146			
貨物船、タンカー	2		0		109	
掘削基地	2		0		1,250	
鉄道災害	10	3.5%	70	0.5%	1	0.0%
鉱山災害	11	3.8%	544	3.6%	43	0.2%
建物や橋梁の崩壊	10	3.5%	410	2.7%	86	0.3%
その他	40	13.9%	1,230	8.2%	69	0.2%
社会的動揺	12		477		4	
テロ	16		517			
その他損害	12		236		65	
合 計	288	100.0%	14,916	100.0%	26,270	100.0%

（出典：Swiss Re, “Natural catastrophes and man-made disasters in 2009 : catastrophes claim fever victims, insured losses fall, Sigma” (No1 / 2010)

b. カタストロフィ（CAT）のリスク量

損害保険のリスク量の中で、CAT リスクのリスク量の占めるウェイトは高い。例えば図表 2 のとおり、EU で実施された第 4 回目の定量的影響度調査（Quantitative Impact Study : 以下 QIS）²において、損害保険リスク全体のリスク量³の 32.3%が

² 定量的影響度調査（QIS）とは、EU で 2013 年頃導入が予定されているソルベンシー II の事前準備のために、この導入の影響を定量的に事前に調査するものである。詳細は後記 2.(2)a.を参照願う。

³ リスク量とは、ソルベンシー資本要件（Solvency Capital Requirement : SCR）のことであり、ソルベンシー II にて規定される必要な資本であり、保険会社のリスク量を評価した値である。詳細は後記 2.(2)a.を参照願う。

CAT リスクである。分散効果反映後⁴でみると 26.7%である。この分散効果反映後の割合は、再保険では 38.2%、キャプティブでは 59.9%となり、更に割合が高まる。

図表 2 カタストロフィ（CAT）の全体に占めるリスク量（SCR）の割合（QIS4）

	損害保険	生損保兼営	再保険	キャプティブ
分散効果反映前(A)	121.1%	118.8%	126.8%	122.3%
保険料&契約準備金(A1)	88.8%	91.8%	78.4%	49.0%
カタストロフィ（CAT）(A2)	32.3%	27.0%	48.4%	73.3%
分散効果(B)	21.0%	18.9%	26.8%	22.3%
分散効果反映後(C)	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
保険料&契約準備金(C1)	73.3%	77.3%	61.8%	40.1%
カタストロフィ（CAT）(C2)	26.7%	22.7%	38.2%	59.9%

（注）リスク量とは、ソルベンシー資本要件（Solvency Capital Requirement：SCR）のことである。

$$C = A - B, C1 = A1 \times (C / A), C2 = A2 \times (C / A)$$

（出典：CEIOPS, “Solvency II - QIS4 Report” (2008.11)）

（2）ソルベンシー規制の取扱い（ソルベンシー II）

先進的なソルベンシー規制であるソルベンシー II における CAT リスクの取扱いを紹介する。

a. ソルベンシー資本要件（SCR）

ソルベンシー II 規制においては、図表 3 のとおり、保険会社に必要な資本である法定資本要件として、ソルベンシー資本要件 (Solvency Capital Requirement: 以下 SCR) を適格自己資本が上回ることが要請される。この SCR はリスク量であり、一定の基準⁵により算出することが定められている。SCR の計量にあたり、前記 2.(1)b. のとおり、CAT リスクは影響が大きく重要なリスク要素である。

ソルベンシー II の導入にあたり、予め定められたラムファルシー・プロセス⁶という手順に基づき、レベル 1 からレベル 4 までの実施に至る過程が定められている。規制の大枠を定めたレベル 1 の枠組指令は既に 2009 年に公布されており、現在はレベル 2 の詳細規定に関する諮問書（コンサルテーション・ペーパー）などが公表されている段階である⁷。

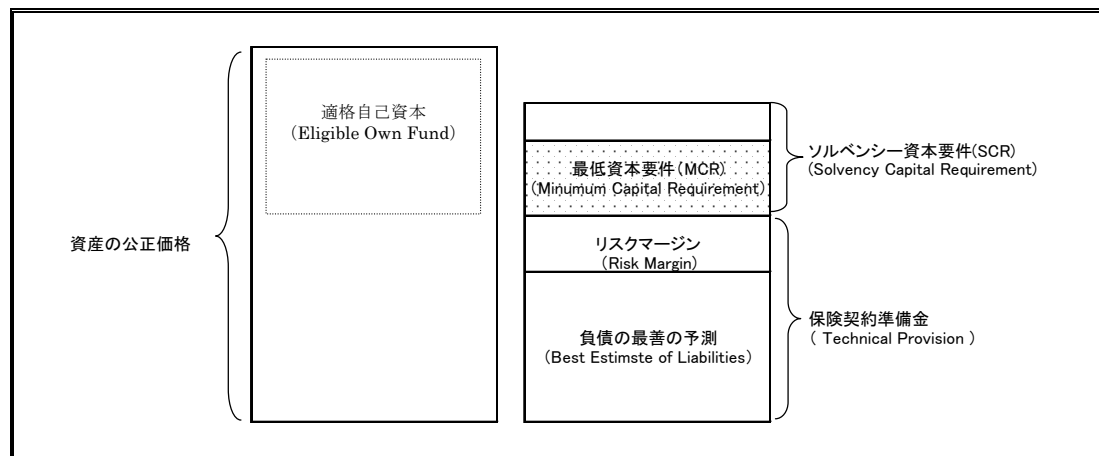
⁴ 分散効果とは、相関関係のある複数のリスクを統合すると、各リスクの総和より統合後のリスクが減少する効果である。

⁵ 一定の基準とは、保有期間（time horizon）1 年、信頼水準（confident level）99.5%、リスク測度（risk measure）に VaR（Value at Risk）による基準である。リスク測度および VaR については、後記 3. を参照願う。

⁶ 金融サービス・アクションプランで定めた目的を達成するため、特に証券市場に必要な立法手続等の迅速化の方法を検討する賢人委員会（Committee of Wise Men）が 2000 年 7 月に設立され、2001 年 2 月 15 日に提出された最終報告書をラムファルシー・レポートという。この中で、レベル 1 からレベル 4 までの 4 段階の立法手続が提案された。この 4 段階の立法手続をラムファルシー・プロセスという。

⁷ CEIOPS から、諮問書としては“CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II :

図表 3 ソルベンシー II の資本要件



ソルベンシー II の SCR 計量にあたり、標準フォーミュラによる方法と、監督者の事前承認を前提に保険会社独自の内部モデルを利用する方法が認められることになる。これらの詳細を、欧州保険職域年金監督者委員会 (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors : 以下「CEIOPS」) が検討中である。これと並行して、CEIOPS はソルベンシー II 導入の影響を事前に調査するため、定量的影響度調査 (Quantitative Impact Study : 以下 QIS) を過去 4 回実施している。現在、第 5 回目の QIS である QIS5 の技術仕様書 (ドラフト)⁸が公表されている段階である。現時点における、QIS5 の SCR の計量方針の全体像は、図表 4 のとおりである。

損害保険リスクについては、損害保険の保険料・契約準備金リスク、損害保険失効リスク、損害保険カタストロフィ (CAT) リスクの 3 つの要素から構成される。損害保険の保険料・契約準備金リスクのリスク量、損害保険失効リスクのリスク量、損害保険 CAT リスクのリスク量をそれぞれ算出し、これらの相関関係を反映したうえで統合して、損害保険全体のリスク量を求めることになる。

標準フォーミュラでは、CAT リスクの計量にあたりシナリオを活用することになっている。このシナリオに関して、CEIOPS の CAT タスクフォース (Catastrophe Task Force) が CAT リスク用の標準シナリオに関するレポート⁹を作成している。なお、2008 年から導入されているスイスの先進的ソルベンシー規制であるスイス・ソルベンシー・テスト (Swiss Solvency Test) においても、シナリオが利用されている¹⁰。

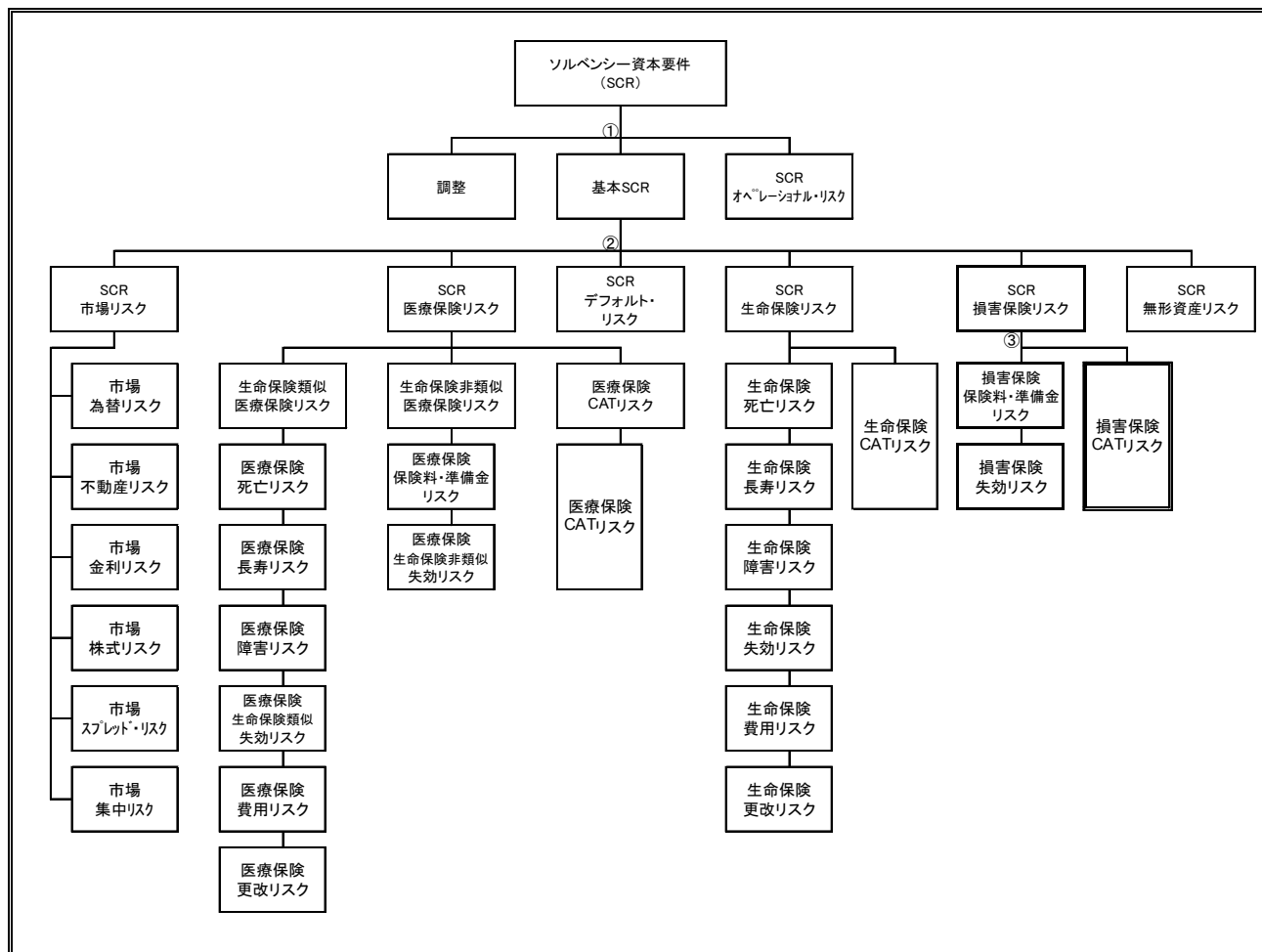
SCR standard formula – Article 111 Non-Life Underwriting Risk (former CP48)(2009.10)が公表されている。更に、標準フォーミュラのシナリオ作成に関するガイダンス “Guidance on the calibration and application of standardized scenarios for the standard formula SCR” (2010.4) が公表されている。

⁸ CEIOPS から、“Technical specifications for QIS5 (draft)” (2010.4)が公表されている。

⁹ CEIOPS から、標準フォーミュラの CAT リスク用シナリオ作成についてのレポート “Catastrophe task force report on standardized scenarios for the catastrophe risk module in the standard formula” (2010.6)が公表されている。

¹⁰ 詳細は拙著「定量的リスク管理のためのモデリング・エコノミック・キャピタル&ストレス・テスト」(2009.12) を参照願う。

図表 4 ソルベンシー資本要件（SCR）計量のためのリスク区分（QIS 5）



（注）法定資本要件（SCR）の計量方法の概要は以下のとおりである。

- ①SCR(ソルベンシー資本要件)は、基本 SCR から調整額を加減し、SCR オペレーショナル・リスクを加算した値である。
- ②基本 SCR は、市場リスク、デフォルト・リスク、生命保険リスク、損害保険リスク、医療保険リスク、無形資産リスクの 6 つのリスクから構成される。無形資産リスクを除く、5 つのリスク量は、各リスク量を計量したうえで、次の相関係数を乗じて統合したリスク量を算出する。この 5 つのリスクを統合したリスク量に、無形資産のリスク量を加算して統合リスクである基本 SCR を算出する。

相関係数	市場 SCR	デフォルト SCR	生保 SCR	医療 SCR	損保 SCR
市場 SCR	1	—	—	—	—
デフォルト SCR	0.25	1	—	—	—
生保 SCR	0.25	0.25	1	—	—
医療 SCR	0.25	0.25	0.25	1	—
損保 SCR	0.25	0.50	0	0	1

- ③損害保険リスクは、保険料・準備金リスク、失効リスク、CAT リスクである。保険料・準備金リスクと失効リスクの相関係数は 0 で独立なことから、両者の統合リスクは単純な合計値である。保険料・準備金リスクのリスク量と失効リスクのリスク量を合計したリスク量と、CAT リスクを統合するにあたり、次の相関係数を適用する。

	損保保険料・準備金＋失効	損保 CAT
損保保険料・準備金＋失効	1	—
損保 CAT	0.25	1

(出典：CEIOPS, “Technical specifications for QIS5 (draft)” (2010.4)をもとに作成)

b. カタストロフィ（CAT）リスクの取扱い

ソルベンシーⅡにおける CAT リスクの取扱いについて、まだ不確定な部分も多いが、CEIOPS が作成した QIS5 技術仕様書（ドラフト）および CAT リスク用の標準シナリオに関するレポートなどをもとに概要を紹介する。

QIS5では、事前に定められた係数等によってリスク量を計算するファクター方式、標準的なシナリオによる方式、個別シナリオによる方式の3種類の方法が検討されている。なお、前回の QIS4 で採用されたこれら3方式の割合は図表5のとおりである。ファクター方式が31%、標準シナリオ方式が39%、個別シナリオ方式が24%であった。保険会社が独自にシナリオを定める個別シナリオ方式を除き、ファクター方式と標準シナリオ方式について概要を以下のとおり説明する。なお、ファクター方式を使用できるのは、一定の要件を満たす場合に限られる¹¹。

図表5 CAT リスク算出方式の使用割合

算出方式	使用割合
方式1：ファクター方式	31%
方式2：標準シナリオ方式	39%
方式3：個別シナリオ方式	24%
未報告	6%

(出典：CEIOPS, “Solvency II - QIS4 Report” (2008.11))

(a) ファクター方式

ファクター方式は、リスク区分ごとの保険料をもとにフォーミュラによってリスク量を定型的に計算する方式である。具体的には、図表6のリスク区分ごとに、次の算式に従い、保険料 P_t に係数 C_t を乗じて2乗した値の合計値の平方根をリスク量として評価する。

$$\sqrt{\sum_{t \neq 3,4,10,12} (\text{保険料 } P_t \times \text{係数 } C_t)^2 + (\text{保険料 } P_3 \times \text{係数 } C_3 + \text{保険料 } P_{12} \times \text{係数 } C_{12})^2 + (\text{保険料 } P_4 \times \text{係数 } C_4 + \text{保険料 } P_{10} \times \text{係数 } C_{10})^2}$$

¹¹ “CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : SCR standard formula – Article 111 Non-Life Underwriting Risk (former CP48)(2009.10)によると、標準シナリオや部分内部モデルを使用することが適当でない場合、雑多（miscellaneous）なものである場合などにファクター方式の使用が認められる（3.121）。また、ファクター方式を使用する場合は、標準シナリオと代替方法（＝ファクター方式）のうち、高い方を採用することが要請される（3.123）。

図表 6 ファクター方式のリスク区分と係数

t	リスク区分（項目 t 別）	影響する保険種目	保険料 P_t	係数 C_t
1	暴風雨	火災、財産、自動車、その他	P_1	$C_1 = 175\%$
2	洪水	火災、財産、自動車、その他	P_2	$C_2 = 113\%$
3	地震	火災、財産、自動車、その他	P_3	$C_3 = 120\%$
4	雹	自動車、その他	P_4	$C_4 = 30\%$
5	大規模な火災・爆発	火災・財産	P_5	$C_5 = 175\%$
6	大規模な海上・航空・運送事故	海上・航空・運送事故	P_6	$C_6 = 100\%$
7	大規模な自動車賠償責任事故	自動車賠償責任	P_7	$C_7 = 40\%$
8	大規模な第三者賠償責任事故	第三者賠償責任	P_8	$C_8 = 85\%$
9	信用	同左	P_9	$C_9 = 139\%$
10	その他	同左	P_{10}	$C_{10} = 40\%$
11	比例割合再保険（財産）	同左	P_{11}	$C_{11} = 250\%$
12	比例割合再保険（海上・航空・運送）	同左	P_{12}	$C_{12} = 250\%$
13	比例割合再保険（新種）	同左	P_{13}	$C_{13} = 250\%$

（出典：CEIOPS, “Technical specifications for QIS5 (draft)” (2010.4)）

(b) 標準シナリオ

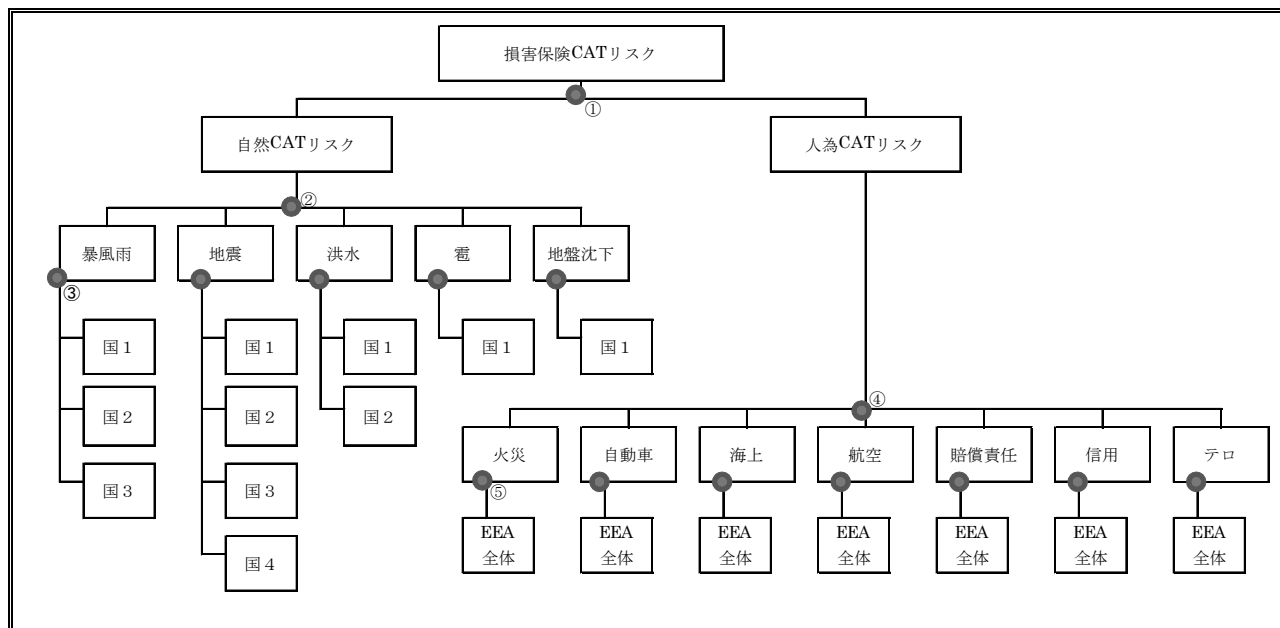
標準シナリオでは、図表 7 のとおり、自然災害である暴風雨、洪水、地震、雹および地盤沈下などの 5 つの災害、人為災害である自動車、火災、海上、航空、賠償責任、信用・保証およびテロなどによる 7 つの災害につき、定められたシナリオに従って SCR（ソルベンシー資本要件）を計量することになる。

損害保険 CAT リスクの SCR は、自然 CAT リスクの SCR と人為 CAT リスクの SCR を統合して計量する。自然 CAT リスクは 5 つのリスクの相関関係を反映したうえで統合する。このリスクには地域特性があるため、国ごとに各リスクを計量し、相関関係を反映のうえで統合して各リスクを計量する。なお、更に地域を細分化したクレスト・ゾーン（CRESTA zone）¹²も活用されている。人為 CAT リスクは 7 つのリスクの相関関係を反映したうえで統合する。この場合には、国ごとの特性はあまりなく欧州経済領域（European Economic Area：EEA）全域で考える。シナリオなども活用する。

¹² クレスト（CRESTA）とは、Catastrophe Risk Evaluation and Standardizing Target の略称である。地震、暴風雨、洪水などの自然災害の集積リスクコントロールのために、国際的な単一システムを構築することを目標とする組織で、スイス再保険やミュンヘン再保険などによって設立された。主要業務は次の 3 つである。

- ① 自然災害の集積リスクデータに関する統一的な詳細データについて、各国の特性ゾーンを決定し、各国のゾーン地図を作成する。
- ② 各国の標準の集積リスク記録フォームを作成する。
- ③ 保険会社と再保険会社間の集積リスクデータを電子的に転送するフォーマットを作成する。

図表 7 ソルベンシーⅡの損害保険 CAT リスク（イメージ図）



（注）損害保険 CAT リスクの計量方法の概要は以下のとおりである。なお、上記の図における●印は相関係数を考慮することを意味する。

①SCR(ソルベンシー資本要件)における、損害保険 CAT リスクのリスク量は、自然 CAT (Natural Catastrophe) と人為 CAT (Man-made Catastrophe) のリスク量を統合したものである。統合にあたり、相関係数は次のとおりである。

相関係数	自然 CAT	人為 CAT
自然 CAT	1	—
人為 CAT	0	1

この相関関係より、損害保険 CAT の SCR は次のとおり算出できる。

$$\text{損害保険 CAT の SCR} = \sqrt{(\text{自然 CAT の SCR})^2 + (\text{人為 CAT の SCR})^2}$$

②自然 CAT は、暴風雨 (Windstorm)、地震 (Earthquake)、洪水 (Flood)、雹 (Hail) および地盤沈下 (Subsidence) の 5 種類のリスクからなる。これらのリスク量をそれぞれ計量し、次の相関係数によって相関関係を反映して統合リスク量を計量する。

相関係数	暴風雨	地震	洪水	雹 (ひょう)	地盤沈下
暴風雨	1	—	—	—	—
地震	0	1	—	—	—
洪水	0.25	0	1	—	—
雹 (ひょう)	0.25	0	0	1	—
地盤沈下	0	0	0	0	1

③自然 CAT の 5 種類のリスクは、それぞれのリスク特性に応じて該当国ごとのリスクを計量し、相関関係を反映したうえ統合して各リスク区分のリスク量を算出している。各国のリスクを計量するにあたり、地域に細分化されたクレスト・ゾーン (CRESTA zone) 単位のリスク情報も活用されている。ハザード・マップすることも推奨されている。詳細事例として、暴風雨リスクのリスク計量について補足資料 A.2 に掲載しているので参照願う。

④人為 CAT は、自動車 (Motor)、火災 (Fire)、海上 (Marine)、航空 (Aviation)、賠償責任 (Liability)、

信用・保証（Credit and Surety ship）、テロ（Terrorism）の7つのリスクからなる。人為 CAT の相関関係は独立と想定されている（CAT リスク用の標準シナリオに関するレポートの 139）。従って、相関関係は次のとおりとなる。

	自動車	火災	海上	航空	信用・保証	賠償責任	テロ
自動車	1	—	—	—	—	—	—
火災	0	1	—	—	—	—	—
海上	0	0	1	—	—	—	—
航空	0	0	0	1	—	—	—
信用・保証	0	0	0	0	1	—	—
賠償責任	0	0	0	0	1	1	—
テロ	0	0	0	0	0	0	1

⑤人為 CAT リスクは、各リスクの国や地域ごとの特性は少なく EEA 全域として把握することが基本である。各リスクの計量にあたり、EEA 全域の国ごとのリスクの相関関係を反映のうえ統合する。詳細事例として、火災リスクのリスク計量については、補足資料 A.2 に掲載しているので参照願う。火災リスクの計量方法の中で、シナリオも活用されている。

（出典：CEIPOS, “Guidance on the calibration and application of standardized scenarios for the standard formula SCR” (2010.4) および CEIOPS, “Catastrophe task force report on standardized scenarios for the catastrophe risk module in the standard formula” (2010.6)などを参考にして作成）

3. リスク評価方法の課題

(1) リスク測度の課題

リスク測度（risk measure）とはリスクを評価するための尺度である。リスクを定量的に評価する際に、リスク測度の選択は重要である。このリスク測度として、バリュー・アット・リスク（Value at Risk：以下 VaR）¹³や期待ショートフォール（Expected Shortfall：以下 ES：Tail-VaR と同様な概念）¹⁴などが活用されている。このリスク測度は、一定の条件を満たす必要があることが議論されている。

a. コヒーレント測度

リスクの計量に用いる測度が適正であるためには、一定条件を充足する必要があることをアーツナー（Artzner）等が提言している¹⁵。この条件とは、次に示すとおり、移動不変性（Translation invariance）、劣加法性（Subadditivity）、正の同次性（Positive homogeneity）および単調性（Monotonicity）の4つの公理である。これらの公理を全て満たす場合にそのリスク測度はコヒーレント（coherent）¹⁶であるとされる。

¹³ 信頼水準 α % の VaR の定義は、 $VaR_{\alpha} = \inf\{l \in \mathbb{R}: P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R}: F_L(l) \geq \alpha\}$ である。詳細は、後記 3.(1)b. および補足資料 B.2 を参照願う。

¹⁴ 信頼水準 α % の ES の定義は、 $ES_{\alpha} = \frac{E(L; L \geq q_{\alpha}(L))}{1 - \alpha} = E(L | L \geq VaR_{\alpha})$ である。詳細は、後記 3.(1)c. および補足資料 B.3 を参照願う。これは、Tail-VaR と同一の内容である。

¹⁵ Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath, “Coherent measures of risk”, (1998.7) を参照願う。

¹⁶ コヒーレントの詳細については、補足資料 B.1 を参照願う。

<4つの公理（コヒーレント測度）>

①移動不変性（Translation invariance）

定額の損失額を加えた損失リスクのリスク量は、当該損失リスクのリスク量に定額の損失額を加算した値である。

②劣加法性（Subadditivity）

統合リスクのリスク計量には分散効果が働く。即ち、複数の損失リスクの統合リスクのリスク量は、個別の損失リスクのリスク量を合計した値以下である。

③正の同次性（Positive homogeneity）

損失リスクの規模に比例してリスク量が増加する。

④単調性（Monotonicity）

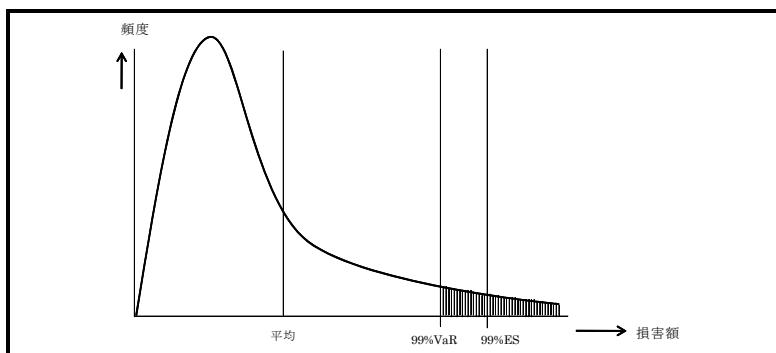
損失リスクが大きければ、リスク量も多い。

b. バリュース・アット・リスク（VaR）の場合

バーゼルⅡで採用され、ソルベンシーⅡで採用が予定されているリスク測度は、VaRである。損害保険金の信頼水準 99%VaR とは、図表 8 のとおり、損害の発生確率が 99%以上となる損害額の最小値である。99%以上の確率で発生する損害額の最小値が 1 億円とすると、資本金 1 億円を保有していれば 99%の確率で保険金支払に困窮することはない。逆に 1%の確率で保険金支払が難しくなる。概念を簡潔化して言い替えると、100 回のうち 1 回が保険金支払不能に陥る可能性があり、保有期間 1 年とすると 100 年に 1 回発生する水準といえる。

ところが、この VaR は前記 3.(1)b.のコヒーレントの 4 公理を充足していない。それは、移動不変性、正の同次性および単調性の 3 要件は充足しているが、一般には劣加法性を満たしていないからである。この具体的な事例は次のとおりである。なお、一定の条件を満たす場合には、VaR は劣加法性を満たしてコヒーレントである¹⁷。

図表 8 確率分布と VaR と ES（イメージ図）



(注)分布の密度関数に関して、99%VaR と 99%ES の損害額（リスク量）の水準を表示している。

¹⁷ 楕円型分布の場合には、VaR はコヒーレントとなる。詳細は補足資料 B.2 を参照願う。

<VaR がコヒーレントでない事例>

保険会社 A 社と B 社が、それぞれ保険料 1 万円で建物の地震保険を 100 件引受けるとする。地震の発生確率は 2% とし、1 件の損害額は 50 万円とする。この事例に 95%VaR を適用する。

○A 社は、地震が同時に発生する同一地域で、建物の地震保険を 100 件引受けることとする。

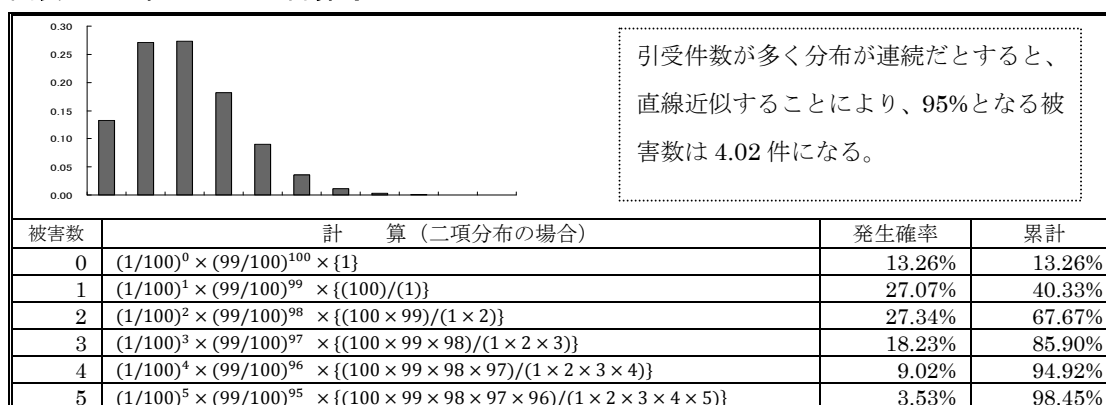
○B 社は、地震が同時に発生しない分散された 100 地域で、それぞれ建物の地震保険を 100 件引受けることとする。

A 社の場合はリスクが 1 カ所に集中している。損害の発生確率が 95%以上となる損害額の下限が 95%VaR である。従って、A 社の場合は 95%の水準では損害は全く発生せず、95%VaR はゼロとなる。VaR の計算において、損害のリスク量はゼロとなるから、収入保険料 100 万円がそのまま収益となる。

一方、B 社の場合には、一定の前提において図表 9 のとおり発生確率を計算すると、4 件地震が発生する確率が 94.92%、5 件地震が発生する確率が 98.45%である。損害の発生確率が 95%以上となる損害額の下限が 95%VaR である。従って、B 社の場合、95%VaR の損害額は 250 万円 (= 50 万円×5 件：連続であると仮定すると近似により 201 万円=50 万円×4.02 件) となる。収入保険料 100 万円、支払保険金 250 万円であり、B 社の収益は 150 万円の損失となる。

不思議なことに、分散効果が働きリスク量が軽減するはずの B 社よりも、A 社の方がリスク量は少なくなる。この事例では、VaR に劣加法性が成立しない。

図表 9 B 社の VaR の計算等



c. 期待ショート・フォール (ES) の場合

支払保険金の信頼水準 99%の ES とは、図表 8 のとおり、信頼水準 99%VaR を超える保険金の平均値であり、1%の確率で発生する巨大損害の平均値とも言える。定義

から ES は VaR を上回る (99%VaR は 1%以内の確率で発生する巨大災害の損害額の最小値である)。損害保険のように巨大災害の発生がヘビー・テイル (heavy tail) ¹⁸な場合には、ES の方が実態に適合しているとの意見がある。

リスク測度 ES は、コヒーレントである¹⁹。ES は、VaR が充足する移動不変性、正の同次性および単調性の 3 つの公理に加えて、劣加法性の公理を満たしているからである。これらのことから、ES はリスク測度として、VaR よりも有効であると考えられることが多い²⁰。

(2) リスク計量モデルの課題

極値事象のリスク計量モデルについて、リスク測度、確率分布および相関関係などの観点から以下のとおり検討する。

a. リスク測度の課題

代表的なリスク測度である VaR は、一定確率以内で発生する極値事象の損害の最小値である。逆にいうと、99%VaR で評価した金額は、1%で発生する極値事象の最小値に過ぎない。発生頻度は低い巨大損害を引き起こす極値事象は、この最小値には反映されにくい。

前記 2.(1)c. のとおり VaR よりも ES の方が、リスク測度として適正であると言われている。ES は、一定確率以内で発生する極値事象の平均値である。99%ES は一定確率以内で発生する極値事象の平均値に過ぎない。ES はコヒーレントであり、巨大損害を引き起こす極値事象も平均値の中には反映している。しかし、ES は一定確率以内で発生する極値事象の平均値に過ぎない。平均値を超える巨大損害を引き起こす極値事象については、発生頻度が高くなければ平均値の中に埋没してしまう恐れがある。巨大災害などの極値事象のみの実態を高い精度で捉えることは、リスク管理上の重要な課題である。

b. リスク要素の確率分布の課題

リスク計量のためには、リスク要素の頻度と損害額から構成される確率分布が必要である。この確率分布にリスク測度を適用することによって、リスク量を定量化できる (なお、ES 等のリスク測度の選定に加えて、99%等の信頼水準や 1 年等の保有期間を定めることが必要)。

損害保険のリスクの確率分布は、一般に、ヘビー・テイルである。このため、損害

¹⁸ ヘビー・テイルとは、記録的な保険損害などの巨大損害額の発生する確率が、相対的に大きい現象をいう。

¹⁹ 詳細は、補足資料 B.3 を参照願う。

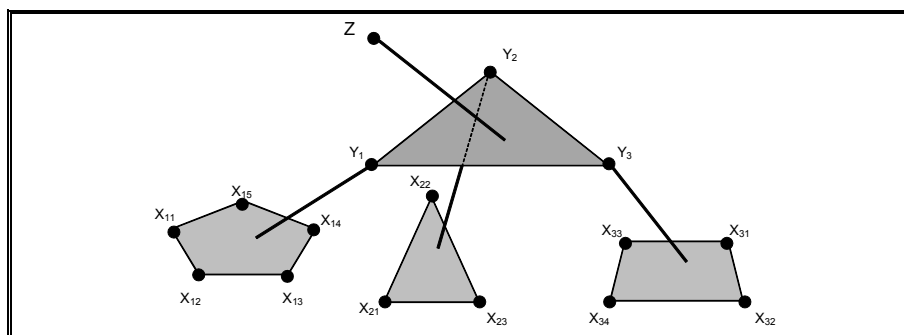
²⁰ 2008 年に導入されたスイス・ソルベンシー・テストでは、ES が採用されている。詳細は拙著「定量的リスク管理のためのモデリング・エコノミック・キャピタル&ストレス・テスト」(2009.12)を参照願う。

保険のリスクには、標準的な分布である正規分布²¹は適合しないと言われている。ヘビー・テールな分布の要因である極値事象を分析し、このリスク実態を適正に表現できる確率分布を構築することが必要となる。このためには、極値事象に専用あるいはマッチした数理理論や確率分布を検討することが課題である。

c. 相関性の課題

損害保険のリスクは単一リスク要因のみによって構成されているわけではない。数多くのリスク要素を内在しており、更に各リスク要素は独立ではなく多様な相関関係によって連動している²²。図表 10 は、リスク要素間の相関関係のイメージ図である。

図表 10 リスク要素間の相関関係（ツリー構造のイメージ図）



（注）ツリー構造にあるリスク要素間の相関関係のイメージ図である。リスク Z は、相関関係のあるリスク Y₁, Y₂, Y₃ を統合したリスクである。リスク Y₁ は、相関関係のあるリスク X₁₁, X₁₂, X₁₃, X₁₄, X₁₅ を統合したリスクである。

（出典：SCOR, “Enterprise Risk Management (ERM) : A driving force for the insurance industry”, Focus (2009.10))

リスク要素間の相関関係を認識することによって、損害保険会社がリスクに曝されている真の状況を把握できる。リスク要素間の相関関係がゼロであれば、相関関係を配慮する必要はないが、実際には多様な相関関係が存在する。相関関係が負の方向であれば、全体としてのリスクは軽減される。逆に、相関関係が正の方向であれば、リスクは集積する。

リスク要素間の相関関係は、リスク要素の種類や特性などによって異なる。また、

²¹ 正規分布とは、2 項分布の極限であり、算式で記述すると、 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ である。詳細は拙著「保険商品の価格（予測と調整）」（2008.3）などを参照願う。正規分布を標準化した標準正規分布については、後記 4.(1)a. を参照願う。また、分布の形状は後記の図表 10 に図示している。

²² 例えば、再保険会社のスコール社は、およそ 500 種類のリスク要素を管理していると言われている。詳細は拙著「定量的リスク管理のためのモデリング・エコノミック・キャピタル&ストレス・テスト」（2009.12）を参照願う。

同一リスク要素間の相関関係であっても、損害の規模により一様ではない。例えば、先般の金融危機では、極値事象における損害発生リスクの相関関係を過小に評価したことに問題があったことが指摘されている²³。損害額の低い事象では相関関係が低くとも、損害額が大きくリスクが集積するような事象については、一気に相関関係が高まることもあり得る。

従って、多様なリスク要素間の相関関係を、これらの構造の実態に合わせてモデリングするとともに、相関関係の定量化においては、定数ではなくリスク分布に応じて変化する変数で表現することが重要である。

4. 極値理論 (EVT)

極値理論 (EVT) につき、1 変数の最大値の EVT、1 変数の閾値の EVT および多変数の最大値の EVT につき、以下のとおり概要を紹介する。

(1) 背景

a. 極値理論 (EVT) の概要

EVT は、^{すいもんがく}水文学²⁴などの研究から始まった。例えば、オランダは国土の 40% は海面下にある。海面に対して堤防を築くことにより国土を守っている。この際に、堤防の高さが問題となる。オランダでは、堤防の高さを検討するため、過去 100 年以上の暴風雨などに関する統計データを整備している。満潮時の海面レベルのデータも同様に整備している。水害等を防止するために、これらの観測データを用いて堤防の高さを検討している。この検討にあたり、極値的な損害を被る事象を分析・予想する目的などに EVT は利用されている。

b. 事象の合計値

事象の合計値については、大数の法則や中心極限定理²⁵が広く知られている。

大数の法則は、損害保険の保険料算出等にも利用されており、観測値の合計を観測数で除した値は、母集団の平均値²⁶に収束するというものである。

中心極限定理は、図表 11 のとおり、一定の要件を満たす場合に観測値から平均値

²³ 金融危機における債務担保証券の事例については、後記 5.(3)a. を参照願う。

²⁴ 水文学 (hydrology) とは、水の発生、水の循環および水の分配などの地球上の水について、物理学や化学などを活用して研究する科学である。

²⁵ 中心極限定理については、補足資料 C. を参照願う。

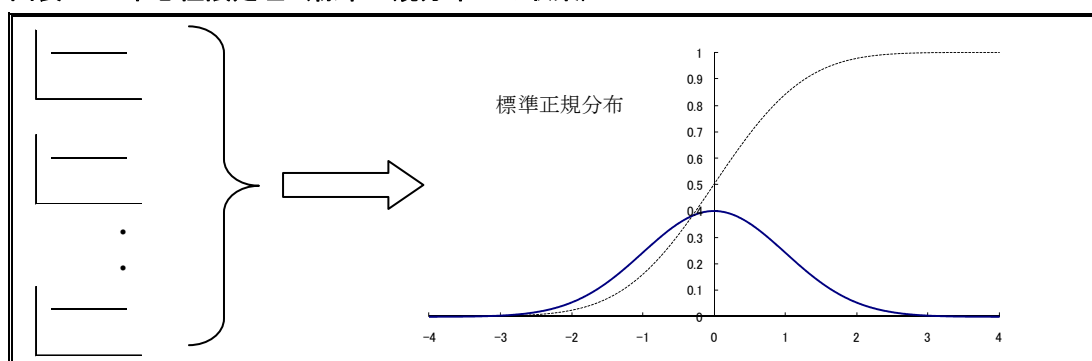
²⁶ 平均値は、平均値 $E(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$ であり、連続系では、 $E(x) = \int x f(x) dx$ 、である。 x_i は確率変数、 $f(x_i)$ は x_i の確率密度関数とする。

を減じた値の合計を観測件数反映後の分散²⁷にて除した値は、標準正規分布²⁸に収束するというものである。これは、観測する母集団の分布の種類や形状などには依存せず、観測数を増加すればこの変換処理を適用した合計値は標準正規分布に従ったものとなる。

$$\frac{\text{観測したデータ}\{X_1, \dots, X_n\}\text{の合計} - \text{平均値}}{\sqrt{\text{観測したデータ}\{X_1, \dots, X_n\}\text{の分散の合計}}}$$

なお、中心極限定理は、分散が存在する場合にのみ成り立つ。ヘビー・テイルな極値事象については、分散の存在を仮定できない。このため、分散の存在を前提としない理論もある。

図表 11 中心極限定理（標準正規分布への収束）



(注) 点線は分布関数、実線は密度関数

(2) 最大値の分布

最大値の EVT では、複数の観測値の合計値ではなく、観測したデータの最大値の分布について統計的に検討する²⁹。

a. 最大値の極値理論（EVT）

最大値の EVT によると、驚くことに、一定の要件を満たす母集団の分布に属する観測データの最大値に一定の変換を行うと、観測データの増加に伴い特定の分布に収

²⁷ 分散とは、バラツキ度合である。分散 $\text{Var}(x_i) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ であり、連続系では分散 $\text{Var}(x) = \int [x - E(x)]^2 f(x) dx$ である。

²⁸ 標準正規分布とは、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ である。 μ は平均値、 σ は標準偏差で、 $\sigma^2 = \text{分散 Var}$ である。

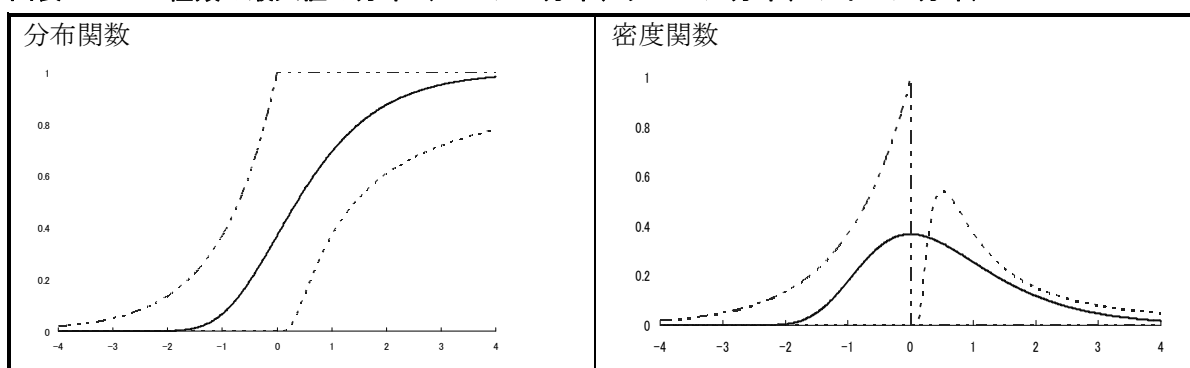
²⁹ 最大値の分布（EVT）の詳細については、補足資料 D. を参照願う。

束する。この特定の分布は、図表 12 の 3 種類の分布の何れかである。なお、一定の変換とは、次式のとおり、基準化定数列 d_n を減じ、基準化定数列 c_n で除したものである³⁰。

$$\frac{\text{観測したデータ}\{M_1, \dots, M_n\}\text{の最大値}M_n - \text{基準化定数列}d_n}{\text{基準化定数列}c_n}$$

具体的には、観測したブロックの最大値に一定の変換を行った値について、観測データを増やしていく。すると、観測データの属する分布の形状に応じて、フレシェ分布³¹、グンベル分布³²、ワイブル分布³³の 3 種類の分布の何れかに収束する。更に、これらの 3 種類の分布は一般化されて、一般化極値（Generalized Extreme Value）分布³⁴という単一分布として表現できる。

図表 12 3 種類の最大値の分布（フレシェ分布、グンベル分布、ワイブル分布）



(注) 点線はフレシェ分布（ $\alpha=1$ ）、実線はグンベル分布、破線はワイブル分布（ $\alpha=1$ ）である。

b. パレート分布の事例

パレート分布³⁵から抽出したデータについて、この最大値に EVT を適用した事例を紹介する。パレート分布の形状は図表 13 のとおりである。

³⁰ 基準化定数列は分布により決まる。

³¹ フレシェ（Fréchet）分布 $\Phi_\alpha(x)$ （ $\alpha > 0$ ）： $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases}$

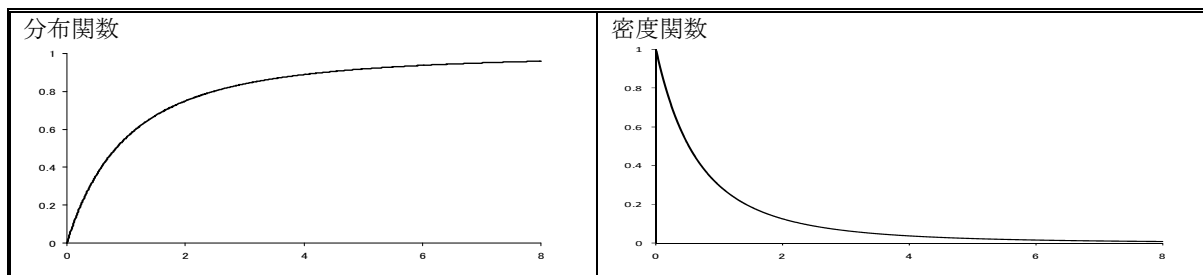
³² グンベル（Gumbel）分布 $\Lambda(x)$ ： $\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$

³³ ワイブル（Weibull）分布 $\Psi_\alpha(x)$ （ $\alpha > 0$ ）： $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

³⁴ 一般極値（GEV）分布： $H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)), & \xi = 0 \end{cases}$

³⁵ パレート分布： $F(x) = 1 - (\kappa/(\kappa + x))^\alpha$ 、生存パレート分布： $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$

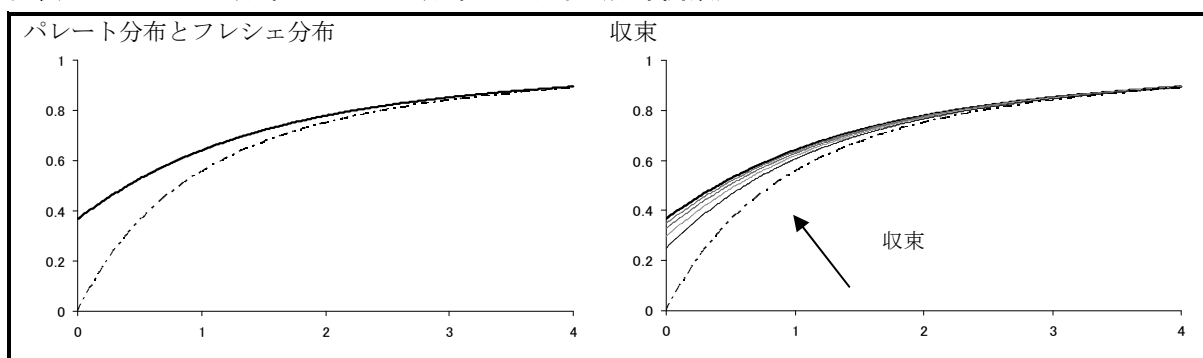
図表 13 パレート分布の概要



(注) パレート分布のパラメータ： $\alpha = 2$, $\kappa = 1$

パレート分布から抽出した多数のデータの最大値に一定の変換を適用したデータの分布は、簡単な計算によりフレシェ分布に収束する³⁶。この状況をグラフ化したものが図表 14 である。

図表 14 パレート分布のフレシェ分布への収束（分布関数）



(注) 実線がフレシェ分布、破線がパレート分布である。

c. 収束する分布の分類

前記のとおり、観測データの最大値が如何なる分布に収束するかは、観測するデータの属する分布の性質のみによって決まる³⁷。個別分布ごとに分布の性質を分析して整理すると、図表 15 のとおりとなる³⁸。一定の変換を行うことにより、パレート分布などはフレシェ分布に、正規分布などはグンベル分布に、一様分布³⁹などはワイブル分布に収束する。

³⁶ この変換に用いる基準化定数は、 $c_n = \kappa n^{(1/\alpha)}/\alpha$, $d_n = \kappa n^{(1/\alpha)} - \kappa$ である。また、パレート分布がフレシェ分布に収束することの詳細については、補足資料 D.3 を参照願う。

³⁷ 分布の特性から 3 種類の分布の何れかに収束するかを分類できる。この詳細については、補足資料 D.2 を参照願う。

³⁸ 詳細については、補足資料 D.3 の別表＜収束分布の分類（具体例）＞を参照願う。

³⁹ 一様分布とは、全ての事象の起こる確率が等しい分布のことである。例えば、区間が 0 から 1 の間とすると、密度関数は $f(x) = 1, x \in (0,1)$ と記述できる。

図表 15 3種類の分布への収束（最大値の分布）

収束する分布	フレシェ分布	ゲンベル分布	ワイブル分布
被収束分布 (収束前の分布)	パレート分布 コーシー分布 対数ガンマ分布	正規分布 対数正規分布 ガンマ分布	一様分布 ベータ分布

(注) 詳細については、補足資料 D.3 の別表<収束分布の分類（具体例）>を参照願う。

(出典：Paul Embrechts, Claudia Kluppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events”
(1997) をもとに作成)

(3) 閾値超過の分布

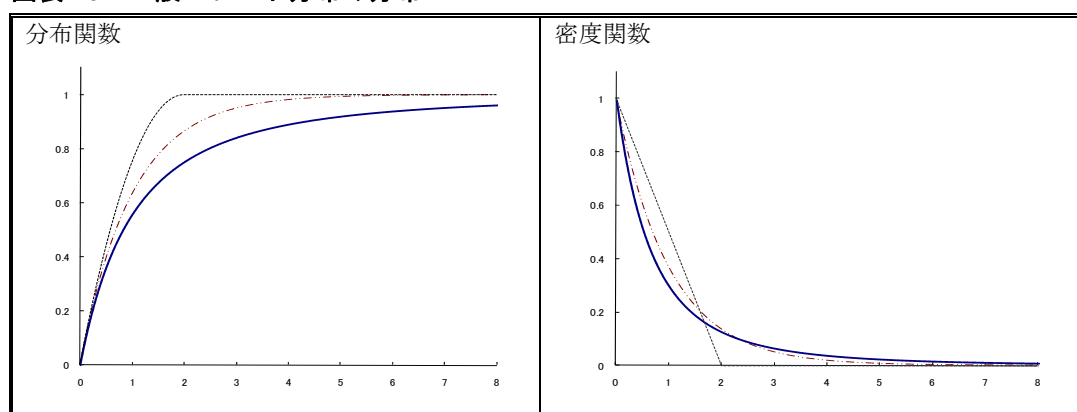
閾値超過の EVT では、複数の観測値の一定値以上などの閾値を超過するデータの分布について、統計的に検討する⁴⁰。

多数の観測値の中から最大値のみを抽出して統計的に分析することは、多くのデータを使用しないことになる。そこで、一定値である閾値（threshold）を超過するデータを利用して統計分析する方法が研究された。例えば、1 億円以上の損害金額のデータなどという条件に従い抽出する。

閾値超過の分布についても、最大値の分布の EVT と同じような考え方が適用できる。一定の要件を満たす母集団の分布に属する観測データのうち、閾値を超過するデータに一定の変換を行うと、観測データの増加に伴い特定の分布に収束する。

この超過分布が収束する特定の分布とは一般化パレート分布（Generalized Pareto Distribution）⁴¹という分布である。この一般化パレート分布の分布関数と密度関数は図表 16 のとおりである。なお、形状パラメータの値によって、分布の形状が異なる。

図表 16 一般パレート分布の分布



(注) 実線は $\xi = 0$ 、破線は $\xi = 0.5$ 、点線は $\xi = -0.5$ である。 ξ は形状パラメータである。

⁴⁰ 閾値の分布（EVT）の詳細については、補足資料 E.を参照願う。

⁴¹ 一般化パレート分布（GPD）： $G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \xi = 0 \end{cases}$

(4) 多変数の最大値の分布

前記 4.(2)と 4.(3)では単一リスク要素を対象とする 1 変数のケースを検討したが、複数のリスク要素を対象とする多変数⁴²の確率分布の EVT について紹介する。多変数の分布を扱うため、1 変数分布を多変数の分布に接合する関数であるコピュラ⁴³ (Copula: 接合関数とも訳される) が重要な役割を担う。まず、コピュラを紹介し、その次に多変数の最大値の EVT を説明する⁴⁴。

a. コピュラ

(a) コピュラの概要

コピュラとは、ラテン語から来た言葉であり英語のカップル (couple) の意味である。コピュラは次の要件⁴⁵を満たす関数であり、多変数の分布は、1 変数の周辺分布をコピュラによって接合した分布に分解できる。また、逆に、1 変数の周辺分布をコピュラによって接合することにより、多変数の分布を構築できる⁴⁶。

<コピュラの要件 (概要)>

- ①コピュラは、各変数に対して単調増加な関数である。
- ②ある 1 つの変数を除き値 1 である場合、コピュラの値はこの変数の値に等しい。
即ち、周辺分布⁴⁷が一様分布であるということである。
- ③任意の領域の確率分布は 0 以上 (非負) である。
(なお、コピュラの変数および値は、0 から 1 の範囲である。)

コピュラをグラフ化した具体的なイメージについては、図表 17 のクレイトン・コピュラ⁴⁸のイメージ図を参照願う。

⁴² 1 変数の場合は確率変数が x など 1 つであった。多変数の場合には確率変数が x, y, z などの複数になる。

⁴³ コピュラについては、補足資料 F. を参照願う。

⁴⁴ 多変数の最大値の EVT (極値理論) の詳細については、補足資料 G. を参照願う。

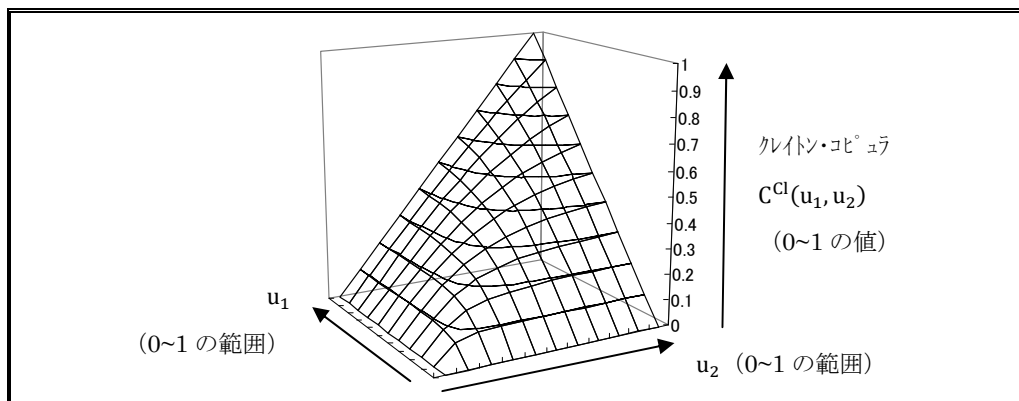
⁴⁵ コピュラの定義については、補足資料 F.1 を参照願う。

⁴⁶ これらのコピュラの特徴については、補足資料 F.2 のスクラーの定理を参照願う。

⁴⁷ 同時分布とは、確率変数が複数個ある場合の確率分布である。周辺分布は、同時分布から各変数だけを取りだした分布である。

⁴⁸ クレイトン・コピュラとは、 $C^{Cl}(u_1, \dots, u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} + 1 - d)^{-1/\theta}$ である。補足資料 F.3 も参照願う。

図表 17 コピュラのイメージ図 (2 変数クレイトン・コピュラ)

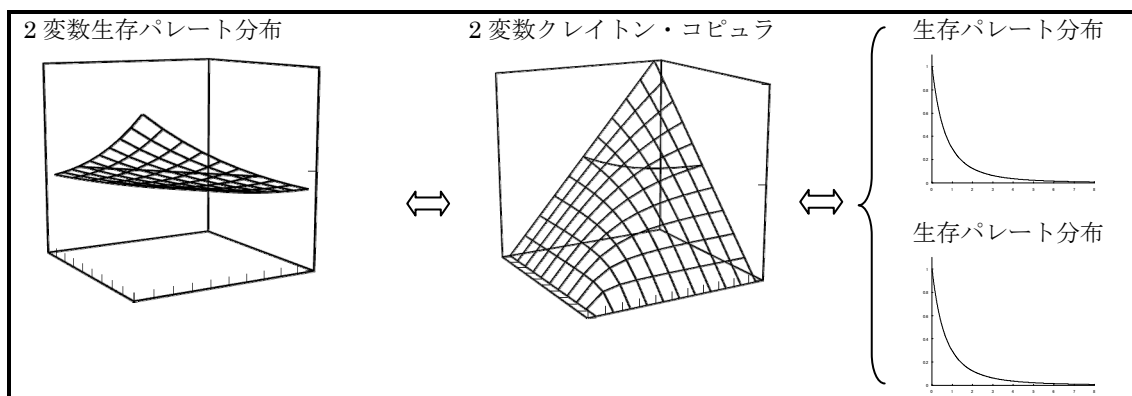


(b) コピュラの適用事例

コピュラを利用して 1 変数の分布を接合し、多変数の分布を作成する事例を説明する。

2 つの 1 変数生存パレート分布を 2 変数クレイトン・コピュラによって接合すると、2 変数生存パレート分布を構築することができる⁴⁹。逆に、2 変数生存パレート分布は、2 つの 1 変数生存パレート分布を 2 変数クレイトン・コピュラによって接合した関数に分解される。これをグラフ化したものが、図表 18 である。

図表 18 生存パレート分布のコピュラによる接合 (イメージ図)



b. 多変数の極値理論 (EVT)

(a) 最大値の場合

多変数の EVT では、1 変数の考え方を多変数の場合に拡張する。

多変数の最大値の EVT でも、一定の要件を満たす母集団の分布に属する観測データの最大値 M_n (多変数) に一定の変換を行うと、観測データの増加に伴い特定の分布 (多変数) に収束する。

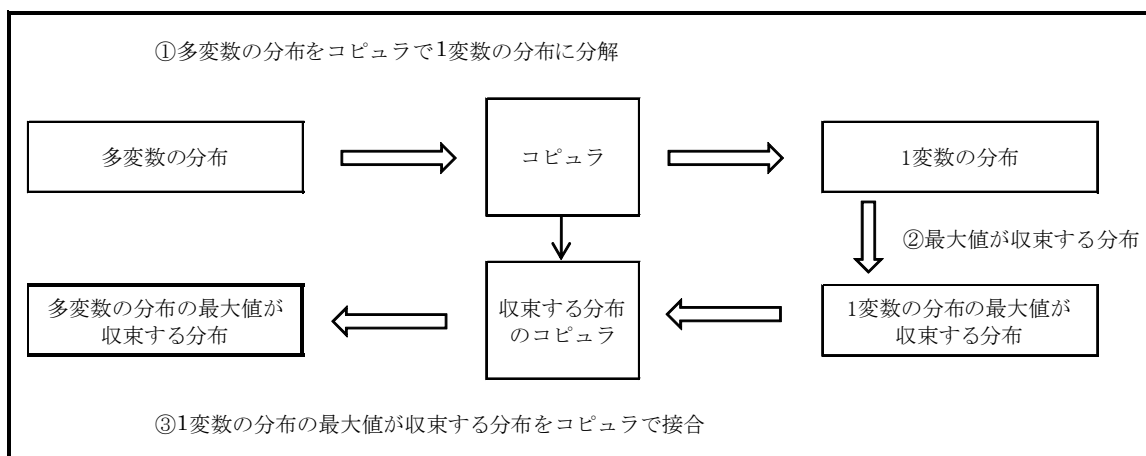
⁴⁹ 詳細は、補足資料 G.3 を参照願う。

なお、一定の変換とは、次式のとおり、基準化定数列 $\mathbf{d}_n$ を減じ、基準化定数列 $\mathbf{c}_n$ で除したものである⁵⁰。

$$\frac{\text{観測したデータ}\{\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n\}\text{の最大値} - \text{基準化定数列}\mathbf{d}_n}{\text{基準化定数列}\mathbf{c}_n}$$

多変数の最大値の EVT については、4.(2)a.の 1 変数の最大値の EVT で多くは解決されている。収束後の多変数分布が周辺分布を持つのであれば、これらの各周辺分布は 3 種類の最大値の収束分布（フレシェ分布、グンベル分布、ワイブル分布）の何れかである。一定の条件に適合する場合には、収束前の分布のコピュラから収束する分布に適用するコピュラが定まる⁵¹。このコピュラを用いて 1 変数の最大値が収束する分布を接合することにより、多変数の分布の最大値が収束する分布を構築できる⁵²。この概念を図示したものが、図表 19 である。

図表 19 多変数の分布の最大値の収束する分布（概念図）



(b) 2 変数パレート分布の最大値が収束する分布の事例

ここでは、図表 19 で概念を示した最大値が収束する分布に関して、具体的に説明する。2 変数パレート分布はコピュラによって、2 つの 1 変数パレート分布の接合として分解できる。前記 4.(2)b.のとおり、1 変数パレート分布の最大値が収束する分布は 1 変数フレシェ分布である。前記 4.(4)b.(a)のとおり、一定の条件に適合する場合には、収束前の分布のコピュラから収束する分布に適用するコピュラが定ま

⁵⁰ 最大値 $= (\mathbf{M}_{n,1}, \dots, \mathbf{M}_{n,d})'$ 、 $\mathbf{c}_n = (c_{n,1}, \dots, c_{n,d})$ 、 $\mathbf{d}_n = (d_{n,1}, \dots, d_{n,d})'$

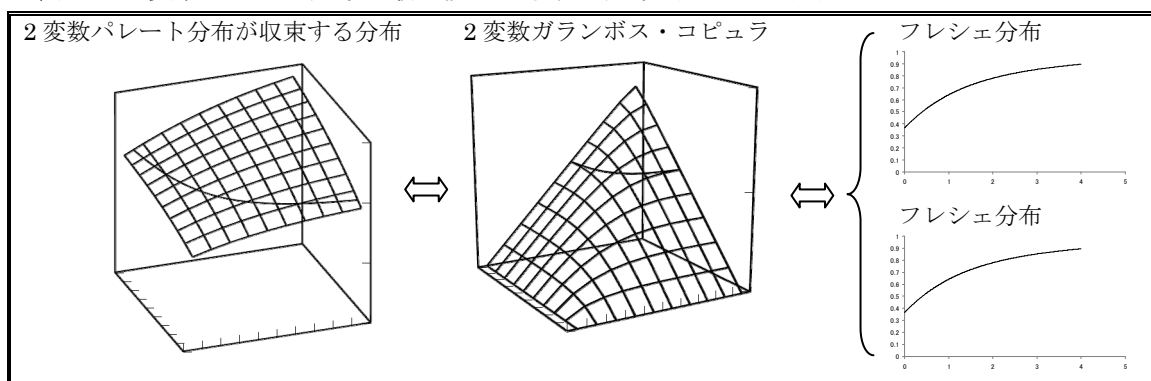
基準化定数列は分布により決まる

⁵¹ 全ての被接合関数の $(1/t)$ 乗のコピュラを t 乗じた関数について、 t を無限大に取ったときの極限とする条件によって定められたコピュラである。詳細は、補足資料 G.1 の EV コピュラを参照願う。

⁵² 多変数の最大値の EVT についての詳細は、補足資料 G.1 および G.2 を参照願う。

る。このコピュラは、ガランボス・コピュラ⁵³である。すると、図表 20 のグラフでイメージを図示したとおり、2 つの 1 変数フレシェ分布をガランボス・コピュラで接合した分布関数が、2 変数パレート分布の最大値が収束する分布となる⁵⁴。

図表 20 2 変数パレート分布の最大値が収束する分布（イメージ図）



5. 極値事象のリスク管理のあり方

(1) 極値理論（EVT）の実践

第 4 章では、EVT の理論面を中心に要点を紹介してきた。ここでは、EVT の実際の活用方法について検討する。EVT 発祥の源の一つといわれている水文学に絡んで、「川の水位と堤防の高さ」の事例をあげて説明する。

a. 事例と統計データ

ある川辺に建設された工場を考える。毎年、大雨等で川が氾濫して洪水を引き起こす。川の両脇には堤防が設けられており、一定の水位以下の洪水であれば、工場に被害は生じないとする。

洪水による被害を防ぐためには、堤防の高さが問題となる。予算に上限がなければ、何十メートルもの高い堤防を広範囲に建設すれば、洪水の心配はないかもしれない。現実には、建設費用を勘案しながら、堤防の高さを決めることになる。なお、十分な高さの堤防でないと、大損害をもたらす極値的な大洪水を防げないという問題は残る。

オランダが、日々の海面の水位のデータを 100 年以上記録しているように、この川でも過去の日々の水位のデータを 100 年間記録していたとする。この過去の水位データをもとに、適正な堤防の高さを検討する手順について、以下のとおり説明する。

⁵³ ガランボス・コピュラとは、 $C^{\text{Gal}}(u_1, \dots, u_d) = u_1 \cdots u_d \exp \{ [(-\ln(u_1))^{-\theta} + \cdots + (-\ln(u_d))^{-\theta}]^{-1/\theta} \}$ である。補足資料 F.3 も参照願う。

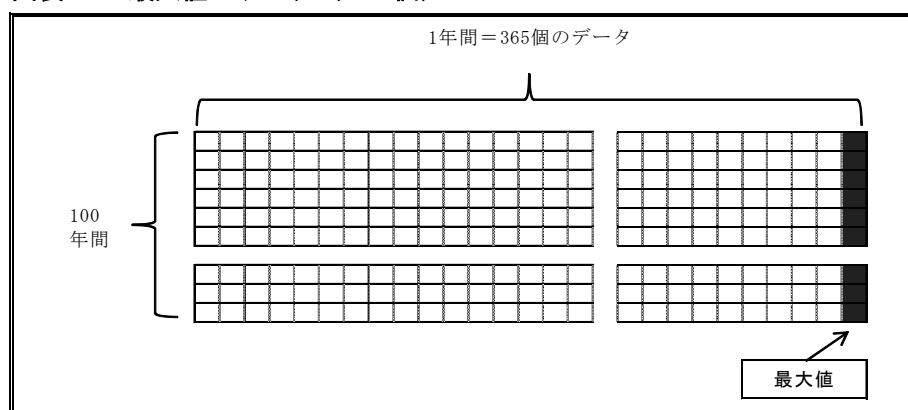
⁵⁴ 本事例の詳細は、補足資料 G.3 を参照願う。

b. 最大値

100 年間の 36,500 個のデータの中から最大値を抽出すると 1 個しか存在せず、これでは分布にはならない。毎年のデータは同一母集団から抽出していることから、図表 21 のとおり 1 年間の 365 個のデータを 1 ブロックと捉え、100 ブロックから最大値のデータ 100 個を抽出する。この最大値 100 個のデータに EVT を適用することにより、川の水位の最大値を分析する。

例えば、横軸に水位、縦軸に該当日数を取り、基準化した最大値のデータをグラフ化して分布を作成する。このグラフに、前記 4.(2)で紹介した理論を適用する。このグラフが最大値の一般化極値 (GEV) 分布に適合するように、パラメータ等を推定して、分布関数を作成できる。この分布関数から、最大値などを推定することになる。

図表 21 最大値のデータ (100 個)



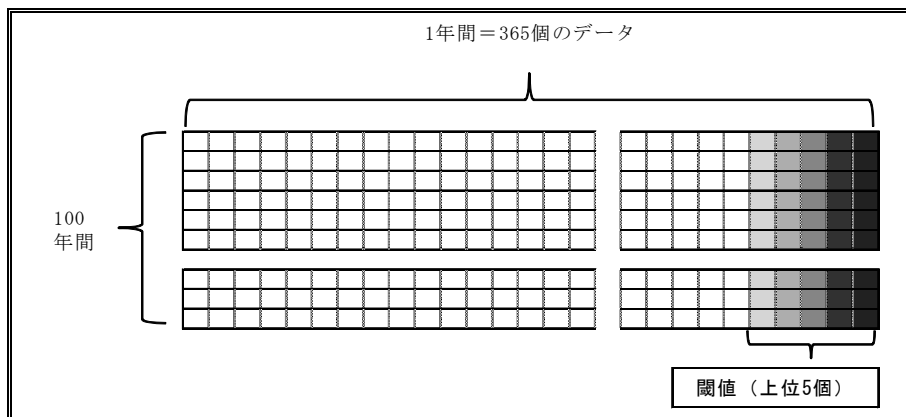
c. 閾値超過

最大値の EVT では、高々 100 個のデータしか利用できない。残りの 36,400 個のデータは使用していない。毎年 1 個しか入手できない最大値だけではなく、一定以上の高順位のデータも活用した方が収集データを有効に活用できる。例えば、5%程度にあたる水位の上位 20 個のデータ、あるいは 2 メータ以上の水位のデータなどが考えられる。図表 22 のように上位 5 個のデータを採用すれば、500 個 (=5 個×100 年) のデータを活用することができる。閾値を高い水準に設定することにより最大値と同様な効果が期待できる（もっとも、この場合には対象データ数は減少する）。

例えば、横軸に閾値、縦軸に平均超過額⁵⁵を設定したグラフを作成する。この閾値超過額のグラフに、前記 4.(3)で紹介した理論を適用する。すると、このグラフが一般パレート分布に適合するようなパラメータ等を推定して、分布関数を作成できる。この分布関数から、閾値を超える平均超過額などを推定することになる。

⁵⁵ 閾値を越える超過額の平均である。平均超過関数は $e(u) = E(X - u | X > u)$ である。詳細は、補足資料 E.1 を参照願う。

図表 22 閾値超過のデータ（500 個）



(2) シナリオと極値理論（EVT）などの活用

発生頻度は高くないが一定以上の巨大損害をもたらすような分布関数の裾にある極値事象のリスク管理には、シナリオや EVT を活用できる。

a. シナリオの活用

極値事象の代表例であるカタストロフィ（CAT）リスクの計量については、第2章で紹介したとおり、ソルベンシーⅡでは3つの方式が採用されている。これらの方式とは、①各保険会社が独自に定める個別シナリオによる方式、②一定の自由度はあるが規制で定められた標準的な方式である標準シナリオ方式、③保険料をもとに規制で定められた算式と係数によって計算する方式であるファクター方式である。標準シナリオでは、リスク要因ごとに、データや係数に基づく計算する方式と、想定したシナリオにもとづきリスクを計量する方式を併用している。

極値事象については、頻度が少ないため過去のデータは十分でないこと、過去の事例が参考にならない事象の発生も懸念されることから、合理性のあるシナリオを活用することは大いに意義がある⁵⁶。

b. 極値理論（EVT）の活用

過去データの分析にあたっては、極値事象の特性に適合した EVT のような手法を活用すべきである。平均的なデータを中心に分析しては、真にリスク管理が必要な極値事象の分析が希薄化してしまう。極値事象を統計的に取扱うには、分布全体の合計ではなく、最大値や閾値の超過値を抽出して分析することが有効である。これらに分析対象を特定化することにより、これらの極値事象の特性が見えてくる。極値事象には、EVT を始めとする極値事象に適合できる数理的手法を適用すべきである。

⁵⁶ シナリオの活用方法については、拙著「定量的リスク管理のためのモデリング・エコノミック・キャピタル&ストレス・テスト」（2009.12）も参照願う。

例えば、EVT を利用して VaR や ES が定めるリスク量を計量するにあたり、閾値の超過値を分析することは有効である。閾値の超過分布を分析することにより、直接、VaR や ES を算出することができる⁵⁷。

(3) 極値事象のリスク管理の課題

a. 金融危機と定量リスク管理

金融危機も極値事象の一つである。金融危機における債務担保証券 (Collateralized Debt Obligation : CDO) の問題などに関しては、スイス連邦工科大学のキャサリン・ドネリー研究員とのポール・エンブレヒツ教授による優れた論文⁵⁸がある。この論文の中から、以下の事項を紹介する。

本論文では、債務担保証券の問題には、極値事象のリスク管理に問題があったことが指摘されている。AAA よりも安全と考えられている最優トランシェ (super-senior tranche) に属する債務担保証券を扱うことは、リスクが極めて少ないフリーラン (free lunch) と思われていた。ところが、この債務担保証券の極値事象におけるリスクは想定されていたより高かった。複数のリスク要素がある債務担保証券の評価にはコピュラが活用されているが、使用するコピュラの種類が適正ではなかった。使用したガウシアン・コピュラ (Gaussian Copula) ⁵⁹は、例えばグンベル・コピュラと比較すると極値の相関関係が適正に表現できない。コピュラ自身に問題があるわけではなく、種類ごとに異なるコピュラの数理特性が理解されていなかったためである。また、例として、債務担保証券を扱う僅か 400 人の子会社の危機が保険会社本体に波及した問題については、リスク管理に課題があったことも指摘されている⁶⁰。

さらに、本論文では、高級監督者グループ (Senior Supervisor Group) が公表したレポート⁶¹を引用して、以下のとおりコメントしている。金融危機において差異のある結果を出せる重要なリスク管理の実践方法 (key risk management practice) の一つが定量的リスク管理である。この活用により、会社全体のリスクを定量的に統合できる。巨大企業においても人間の判断は本質的なものではあるが、これだけでは十分ではない。多くのリスク計量方法が十分に研究されてきた。例えば、金融危機は極値事象の一つと捉え、このような事象を評価する数理的フレームワークも存在する。EVT などによって、相関関係のある集中リスクの定量化やリスクの統合が実践できる。

⁵⁷ 詳細は、補足資料 E.2 を参照願う。

⁵⁸ Catherine Donnelly and Paul Embrechts, “The devil is in the tails :Actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis”(2010.5)

⁵⁹ ガウシアン・コピュラとは、 $C_p^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_P\{\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)\}$ である。ただし、 Φ は標準正規分布、 Φ_P は同時分布で、 P は相関係数の行列である。補足資料 F.3 も参照願う。

⁶⁰ 本論文では、保険会社が、CDO などに関して適正な定量的リスク管理ができていなかったこと、2007 年までは流動性リスクをモデリングしていなかったことなどが指摘されている。

⁶¹ William L. Rutledge (Senior Supervisors Group: Chairman), “Observation on risk management practices during the recent market turbulence”(2008.3)

b. 定量的リスク管理の課題

極値事象は、発生頻度が低いことから取扱いが難しい。しかし、発生した場合の影響が大きいことから重要である。前記 5.(3)a. のとおり、極値事象のリスク管理のポイントの一つは定量化である。本質的な最終判断は人間が行うことになるが、定量化しないと判断する材料が揃わない。特に、巨大な保険会社ではオペレーションが広範囲で多岐にわたるため、定量化しないと事実認識さえ難しいこともある。

極値事象の振舞は、平均的な動きをする一般事象とは異なる。このため、極値事象の定量的リスク管理にあたり、EVT などの極値事象向けの理論が必要である。これらの理論に基づき、過去のデータ等をベースにして将来の事象を推定することになる。さらに、将来のシナリオを描き、これに基づく推定も有効であると考ええる。このシナリオ作成にあたっては、確定論的（deterministic）なものが主流であるが、必要に応じて確率論的（stochastic）なシナリオも利用し得る。

実際に運用する極値事象の定量的リスク管理担当には、特に、高度な理論的知識と豊富な実務経験が不可欠である。何故ならば、過去のデータ蓄積が少なく、特殊な事象だからである。しかも、極値事象に起因する損害は巨額になることが多く、適正でなかった場合の影響は甚大だからである。

これらのことから、極値事象のリスク管理には、①リスク管理の定量化、②極値事象専用の理論等の活用、③高度な理論・技術と豊富な経験を有する専門性の高い人材が必要であることがわかる。さらに、④定量的リスク管理のための実践ツールである内部モデルによるサポートも不可欠であると思料する。

c. 定性的リスク管理の課題

極値事象のリスク管理の定量的な取扱いを中心に紹介してきた。保険会社の統合的なリスク管理である ERM（Enterprise Risk Management）においては、定量面だけでなく定性面も重要である。極値事象の影響は保険引受リスクだけではなく、市場リスク、デフォルト・リスク、オペレーショナル・リスクなどが保険会社全体に及ぶ。例えば東京に地震が起きれば、損害保険、生命保険および医療保険の引受リスクが影響を受けるのは勿論、株価の変動などの市場リスク、保険会社の事務に支障をきたすオペレーショナル・リスクも危惧される。子会社の債務担保証券のリスクが親会社に波及し、致命的な影響を与えた事例もある。また、個社単独では解決できないレベルのリスクもある⁶²。

従って、極値事象のリスクも、ERM のフレームワークの中にしっかりと埋め込み、定性面と定量面を統合的に管理する必要があると考える。特に、発生頻度が低く損害額が大きい場合、十分な注意を払って管理することが不可欠である。さらに、極値事

⁶² 自然 CAT リスクなどに関しては、所有者、保険者、再保険者、資本市場および政府によって、リスクが保有・転嫁される。詳細は、拙著「気象現象と損害保険・天候デリバティブの価格など」（2008.12）を参照願う。

象のリスク管理がリスク管理文化（**risk management culture**）の一部となり、リスク管理に直接かかわる保険会社社員だけではなく、全社員に重要性が浸透することが望ましい。

最終的には、極値事象のリスク管理のポイントは、経営判断である。リスク管理の徹底した健全な保険会社を目指すためには、必要に応じて即座に、定量的に精度の高い情報を経営にレポートすることが必要である。経営は、極値事象のリスク管理の重要性を十分認識したうえで、これらリスク管理に関するレポートに基づき、最善の判断を迅速に行う必要があると思料する。

6. おわりに

極値事象につき、事象発生の実態、ソルベンシー規制などにおける取扱い、リスクの計量方法、極値理論等の定量的リスク管理の理論と実践などについて、概観してきた。

金融機関の中でも損害保険会社は、特に、極値事象にかかるリスクの管理の重要度が高い。このため、極値事象のリスク管理は、経営にとって重要事項の一つである。ERMのフレームワークの中で、極値事象の発生の可能性を洗い出すこと、極値事象の影響と発生頻度を推定し定量化すること、リスク管理方針に基づき極値事象のリスクを軽減や転嫁等を実行することなどが益々必要になってきている。

これらの ERM のために、極値事象のリスク管理に関する理論的研究が進み、豊富な経験を有する専門性の高い人材が育成され、洗練された内部モデルが構築されることにより、ERM が一層進化することを祈念する。

補足資料

補足資料 A. ソルベンシーⅡにおけるカタストロフィ（CAT）リスク

- A1. 詳細規則の概要
- A2. 標準シナリオの例

補足資料 B. リスク測度（Risk Measure）

- B1. コヒーレント（Coherent）
- B2. バリュー・アット・リスク（VaR）の評価
- B3. 期待ショートフォール（ES）の評価

補足資料 C. 合計値の分布（中心極限定理）

補足資料 D. 最大値（Maxima）の分布（EVT）

- D1. 一般化極値分布（GEV）への収束
- D2. 3種類の分布への収束（分類）
- D3. 被収束分布の具体例

補足資料 E. 閾値（Threshold）の超過分布（EVT）

- E1. 閾値の超過分布
- E2. 超過分布によるリスク計量

補足資料 F. コピュラ（Copula）

- F1. コピュラの定義
- F2. スクラーの定理
- F3. 各種コピュラ

補足資料 G. 多変数の極値分布（最大値）（EVT）

- G1. 多変数の最大値
- G2. ピカンズ表現
- G3. EV コピュラの事例（2変数パレート分布の場合）

A. ソルベンシーⅡにおけるカタストロフィ（CAT）リスク

ソルベンシーⅡにおけるカタストロフィ（CAT）リスクの取扱いについて、CEIOPS が公表した “Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : SCR standard formula – Article 111 Non-Life Underwriting Risk (former CP48)(2009.10)、“Technical specifications for QIS5 (draft)” (2010.4)、“Guidance on the calibration and application of standardized scenarios for the standard formula SCR” (2010.4) および “Catastrophe task force report on standardized scenarios for the catastrophe risk module in the standard formula” (2010.6)などにに基づき説明する。なお、これらの内容は現在検討中であり、最終的なものでない。

A.1 詳細規制の概要

ソルベンシーⅡにおける CAT リスクの詳細規制（レベル 2）に関する CEIOPS のアドバイスの抜粋は次のとおりである。

< CEIOPS のアドバイス（抜粋） >

3.107

- ・ 自然危険、人口危険のリストを作る。危険や事象はビジネスに対応し、エクスポージャーの測定方法などの情報を持つ。このリストはレビューされる。
- ・ 予定標準シナリオの範囲を緩和する特別の国家政策のリストを作成する。
- ・ EU の CAT 損害の過去の履歴データベースを作成する。このデータベースには、例えば、EU 内の、日時、危険、場所、影響された業務などを記録する。これらは、業界の協力を得て行う。

3.109

保険料リスク、保険準備金リスク、CAT リスクの 3 つのリスクの区分を明確にする。従って、CAT リスクに含まれないものは、保険料リスクか保険準備金リスクに含まれる。標準シナリオには、資本要件におけるリスクの定義も含む。

3.110

少なくとも、シナリオは次の事象のために構築するべきである。

自然危機

暴風雨：火災、財産；他者の自動車

洪水：火災、財産；他者の自動車

地震：火災、財産；他者の自動車

雹：火災、財産；他者の自動車

人為危機

大規模な火災、爆発：火災、財産

大規模な海上・航空・運送災害：海上・航空・運送（MAT）

自動車第三者賠償責任災害：自動車第三者賠償責任

第三者賠償責任災害：第三者賠償責任

3.123

ファクター方式を使用する場合には、標準シナリオと代替方法（＝ファクター方式）のうち、高い方を採用することが要請される。

（出典：CEIOPS, “CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : SCR standard formula – Article 111 Non-Life Underwriting Risk (former CP48)(2009.10) ）

A.2 標準シナリオの例

標準シナリオについて、CEIOPS, “Catastrophe task force report on standardized scenarios for the catastrophe risk module in the standard formula” (2010.6)などをもとに、以下のとおり説明する。

(1) 概要

損害保険の CAT リスク (NL_CAT) は、次のとおり、自然 CAT リスク (NL_CAT_{NatCat}) は 5 種類のリスク、人為 CAT リスク (NL_CAT_{ManMade}) は 7 種類のリスクに分けて計量している。自然 CAT リスクと人為 CAT リスクの相関関係は独立としている。従って、下記の算式のとおり、損害保険の CAT リスク (NL_CAT) は、自然 CAT リスク (NL_CAT_{NatCat}) の 2 乗に、人為 CAT リスク (NL_CAT_{ManMade}) の 2 乗を加算したものの平方根である。

自然 CAT リスク：暴風、洪水、地震、雹、地盤沈下

人為 CAT リスク：自動車、火災、海上、航空、賠償責任、信用・保証、テロ

$$NL_CAT = \sqrt{(NL_CAT_{NatCat})^2 + (NL_CAT_{ManMade})^2}$$

(2) 自然カストロフィ (CAT)

自然 CAT の各リスク (CAT_{n_peril,i}) について、次の算式のとおり、相関係数 (Corr_{i,j}) を反映して統合したものが、自然 CAT リスク (NL_CAT_{NatCat}) である。

各リスクの国ごとのリスク (CAT_{ctry,i}) について、次の算式のとおり、相関係数 (Corr_{i,j}) を反映して統合したものが自然 CAT の各リスク (CAT_{n_peril,i}) である。例えば、暴風雨の場合の国別相関係数は、次の別表<暴風雨の国別相関係数：CAT_{ctry,j}>のとおりである。

$$NL_CAT_{NatCat} = \sqrt{\sum_{n_peril,i,j} Corr_{i,j} \times CAT_{n_peril,i} \times CAT_{n_peril,j}}$$

$$CAT_{n_peril} = \sqrt{\sum_{CTRY,i,j} Corr_{i,j} \times CAT_{ctry,i} \times CAT_{ctry,j}}$$

(3) 人為カストロフィ (CAT)

人為 CAT の各リスク (CAT_{m_peril,i}) について、次の算式のとおり、相関係数 (Corr_{i,j}) を反映して統合したものが、自然 CAT リスク (NL_CAT_{ManMade}) である。人為 CAT の各リスクは、2010 年 6 月時点では独立と想定されている。

各リスクの国ごとのリスク (CAT_{ctry,i}) について、次の算式のとおり、相関係数 (Corr_{i,j}) を反映して統合したものが自然 CAT の各リスク (CAT_{m_peril,i}) である。

$$NL_CAT_{ManMade} = \sqrt{\sum_{m_peril} Corr_{peril} \times CAT_{m_peril}}$$

$$CAT_{m_peril} = \sqrt{\sum_{ctry,i,j} Corr_{i,j} \times CAT_{ctry,i} \times CAT_{ctry,j}}$$

< 暴風雨の国別相関係数：Corr_{ctry i,j} >

	AT	BE	CH	CZ	DE	DK	ES	FR	UK	IE	IS	LU	NL	NO	PL	SE	GU	SM	MA	RE
AT	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
BE	0.25	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
CH	0.50	0.25	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
CZ	0.25	0.25	0.25	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
DE	0.25	0.50	0.25	0.25	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
DK	0.00	0.25	0.00	0.00	0.50	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
ES	0.00	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
FR	0.25	0.50	0.50	0.25	0.50	0.25	0.25	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—			
UK	0.00	0.50	0.00	0.00	0.25	0.25	0.00	0.25	1.00	—	—	—	—	—	—	—	—			
IE	0.00	0.25	0.00	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00	—	—	—	—	—	—	—			
IS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	—	—	—	—	—	—			
LU	0.25	0.75	0.25	0.25	0.50	0.25	0.00	0.75	0.25	0.25	0.00	1.00	—	—	—	—	—			
NL	0.25	0.75	0.25	0.25	0.50	0.50	0.00	0.50	0.50	0.25	0.00	0.50	1.00	—	—	—	—			
NO	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.50	0.00	0.00	0.25	0.00	0.00	0.25	0.25	1.00	—	—	—			
PL	0.00	0.25	0.00	0.25	0.50	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.25	0.00	1.00	—	—			
SE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.00	1.00	—			
GU	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	—	—	—
SM	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	—	—
MA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	—
RE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

(注) AT:オーストリア, BE:ベルギー, CH:スイス, CZ:チェコ, DE:ドイツ, DK:デンマーク, ES:スペイン, FR:フランス, UK:イギリス, IE:アイルランド, IS:アイスランド, LU:ルクセンブルグ, NL:オランダ, NO:ノルウェー, PL:ポーランド, SE:スウェーデン, GU:グアダルーペ島, SM:セント・マール島, MA:マデイーナ島, RE: リユニオン島

(4)リスクごとの具体例

a. 暴風雨（Windstorm）の場合

自然 CAT (NL_CAT_{NatCat}) の事例として暴風雨の CAT リスク (CAT_{Windstorm}) の場合を次の算式によって算出する。用語・記号は次の別表のとおりである。

$$CAT_{Windstorm_ctry} = Q_{CTRY} \sqrt{\sum_{rxc} AGG_{r,c} \times WTIV_{zone,r} \times WTIV_{zone,c}}$$

$$WTIV_{ZONE} = F_{ZONE} \times TIV_{ZONE}$$

<用語・記号の解説>

用語・記号	解説
$CAT_{Windstrom_ctry}$	国別の暴風雨によるカタストロフィのリスク量 $CAT_{Windstrom_ctry} = Q_{CTRY} \sqrt{\sum_{rxc} AGG_{r,c} \times WTIV_{zone,r} \times WTIV_{zone,c}}$
Q_{CTRY}	国別のリスク要素（200年に1度の水準） ^{（注）}
$AGG_{r,c}$	$WTIV_{zone}$ を統合するための行列（値は数値テーブルに別途定めている）
$WTIV_{zone,r}, WTIV_{zone,c}$	ゾーン別に加重した保険金額の合計である $WTIV_{ZONE}$ の行列
$WTIV_{ZONE}$	各ゾーン内の TIV_{ZONE} にゾーン別の相対要素 F_{ZONE} を乗じた値 $WTIV_{ZONE} = F_{ZONE} \times TIV_{ZONE}$
TIV_{ZONE}	TIV_{zone_Fire} と TIV_{zone_MAT} の合計 TIV_{zone_Fire} は、ゾーン内の火災等の保険金額の合計 TIV_{zone_MAT} は、ゾーン内の海上の保険金額の合
F_{ZONE}	国ごとのゾーン別の相対要素

（注） Q_{CTRY} の値は、別表、国別のリスク要素のとおりである。

2つの事象 A と B を想定して、再保険控除後の暴風雨のリスクを評価する。再保険の保険料や限度額は考慮する。そして、両者のリスク量の大きい方を、正味リスク量とする。

$$CAT_{Windstrom_ctry_net} = \text{Max}(CAT_{Windstrom(A)_ctry_net}, CAT_{Windstrom(B)_ctry_net})$$

$$CAT_{Windstrom(A)_ctry_net} = \text{EVENT A1 の損害} + \text{EVENT A2 の損害}$$

$$\text{EVENT A1(1 番目の事象)} = 0.8 \times CAT_{Windstrom(A)_ctry} \quad (\text{再保険控除後})$$

$$\text{EVENT A2(2 番目の事象)} = 0.4 \times CAT_{Windstrom(A)_ctry} \quad (\text{再保険控除後})$$

$$CAT_{Windstrom(B)_ctry_net} = \text{EVENT B1 の損害} + \text{EVENT B2 の損害}$$

$$\text{EVENT B1(1 番目の事象)} = 1.0 \times CAT_{Windstrom(B)_ctry} \quad (\text{再保険控除後})$$

$$\text{EVENT B2(2 番目の事象)} = 0.2 \times CAT_{Windstrom(B)_ctry} \quad (\text{再保険控除後})$$

< 国別のリスク要素 >（200年に1度の水準： Q_{CTRY} ）

	暴風雨	地震	洪水	雹（ひょう）	地盤沈下
オーストリア（AT）	0.08%	0.10%	0.15%	0.08%	
ベルギー（BE）	0.16%	0.02%	0.10%	0.03%	
ブルガリア（BG）		1.60%	0.15%		
クロアチア（CR）		1.60%			
キプロス（CY）		2.35%			
チェコ（CZ）	0.03%	0.10%	0.40%		
スイス（CH）	0.08%	0.25%	0.15%	0.06%	
デンマーク（DK）	0.25%				
エストニア（EE）					
フィンランド（FI）					
フランス（FR）	0.12%	0.06%	0.10%	0.01%	0.05%
ドイツ（DE）	0.09%	0.10%	0.20%	0.02%	

	暴風雨	地震	洪水	雹（ひょう）	地盤沈下
ギリシャ（HE）					
ハンガリー（HU）		0.20%	0.40%		
アイスランド（IS）	0.03%				
アイルランド（IE）	0.20%				
イタリア（IT）		0.80%	0.10%	0.05%	
ラトビア（LV）					
リヒテンシュタイン（LT）					
ルクセンブルク（LU）	0.10%			0.03%	
マルタ（MT）					
オランダ（NL）	0.18%			0.02%	
ノルウェー（NO）	0.08%				
ポーランド（PL）	0.04%		0.30%		
ポルトガル（PT）		1.20%			
ロマニア（RO）		1.70%	0.40%		
スロバキア（SK）		0.15%	0.45%		
スロベニア（SI）		1.00%	0.30%		
スペイン（ES）	0.03%				
スウェーデン（SE）	0.09%				
イギリス（UK）	0.17%		0.10%		
グアドループ島（GU）	2.74%	4.09%			
セント・マーチ島（SM）	3.19%	4.71%			
マーティニーク（ST）	5.16%	5.00%			
リユニオン（RE）	2.50%				

b. 火災の場合

自然 CAT（NL_CAT_{ManMadeCat}）の代表事例として火災の場合を説明する。

火災の CAT リスクについては、2つの方式から選択できる。選択肢 1 は、定められた算式に基づき、詳細情報適用するものである。選択肢 2 は簡潔なシナリオによるものである。これらの概要は以下のとおりである。

<選択肢 1>

次の算式に基づき、火災の CAT リスクを算出する

$$CAT_{\text{Fire}} = P \times x$$

P：半径 150 メータ以内に発生する火災等による損害の最大集積損害額

x：実際に被る損害割合（100%を適用）

<選択肢 2>

次の算式に基づき、火災の CAT リスクを算出する

$$CAT_{\text{Fire}} = \text{Max}\left(\text{LSR}, \sum_{\text{sub_lines}} SI_x \times F_x\right)$$

LSR：全てのサブライン x に横断の最大単一リスクによって生じる最大損害金額である。（保険契約は 1 つとは限らず、複数もあり得る。）

SI_x：総保険金額である。x=FR は居住用、x=FC は商業用、x=FI は産業用である。

F_x：サブライン x ごとに定める市場横断の火災による事業中断要因である。

1/200 の損失率を適用すると、居住用 0.004%、商業用 0.010%、産業用 0.073%である。

シナリオの例

シナリオ 1

世界最大級の石油精製施設を有するロッテルダム港で、爆発や火災が発生することを想定する。大量の原油が港内に貯蔵され、爆発によって火災を引き起こした。火災によって、多くの死亡者、湾の閉鎖（ビジネスの中断）ほとんどの湾岸の建造物や機械の崩壊し、毒性の高い噴煙が蔓延した。

シナリオ 2

戦闘機の漏電により、軍需会社の敷地内で火災が発生した。建物内の 10 機のジェット戦闘機が、収容ホールや機械装置とともに破壊した。

B. リスク測度 (Risk Measure)

リスク測度について以下のとおり説明する。なお、本項目執筆にあたり、Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath, “Coherent measures of risk”, (1998.7)、Alexander J. MacNeil, Rüdiger Frey, Paul Embrechts, “Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools” (2005)などを参考にした。符号の使用方法については“Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools”に合わせた。

B.1 コヒーレント (Coherent)

アーツナー (Artzner) が提唱するリスク測度に必要なコヒーレント性を確保するための要件は、下記の4公理 (移動不変性、劣加法性、正の同次性、単調性) から成り立つ。移動不変性は、損失 L のポジションに定数 l の損失が加わると、追加すべき資本も l 増加することである。劣加法性は、分散投資によりリスクを軽減できることである。正の同次性は、損失 L が λ 倍になると追加すべき資本も λ 倍になることである。単調性は、大きな損失を生じさせるのであれば多くの資本量が必要になることである。

$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率変数全体を $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$

金融リスクは、確率変数の集合 $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{M}$ は凸 (convex) : 即ち、 $L_1 \in \mathcal{M}, L_2 \in \mathcal{M}$ ならば、全ての λ に対して、 $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$ 、 $\lambda L_1 \in \mathcal{M}$

リスク測度 $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho(L)$ は、損失 L のポジションが、内部管理者にとって受容可能となるために追加すべき資本量である。

コヒーレントの4公理

公理 1 : 移動不変性 (Translation invariance)

$\rho(L + l) = \rho(L) + l$ 、ただし $L \in \mathcal{M}, l \in \mathbb{R}$

公理 2 : 劣加法性 (Subadditivity)

$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ 、ただし、 $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$

公理 3 : 正の同次性 (Positive homogeneity)

$\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$

公理 4 : 単調性 (Monotonicity)

確率 P で、 $L_1 \leq L_2$ を満たすならば、 $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$

なお、「公理 3 の正の同次性」は議論の対象となっている。 λ が大きい場合には、リスクの集中およびこれによって発生する流動性リスクの問題がある。この場合には、 $\rho(\lambda L) < \lambda \rho(L)$ にすべきとの議論がなされている。

しかしながら、 $\rho(\lambda L) < \lambda \rho(L)$ の条件は、分散効果である劣可能性を充足しない。そこで、劣加法性のもたらす分散効果を考慮したうえで、次のとおり凸リスク測度 (convex risk measure) などが検討されている。

$$\rho(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) \leq \lambda \rho(L_1) + (1-\lambda)\rho(L_2) \quad \lambda \in [0,1]$$

このリスク測度においては、 $\lambda > 1$ の場合、凸性のために不等号が反転して $\rho(\lambda L) \leq \lambda \rho(L)$ となる。

B.2 バリュアット・リスク (VaR) の評価

バリュアット・リスク (Value at Risk : 以下 VaR) の定義は次のとおりである。

定義 : VaR

信頼水準 α の VaR とは、損失 L が l を超える確率が $1 - \alpha$ となる l の最小値である。

$$\text{VaR}_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

VaR は、次のとおり定義する楕円型分布のケースでは、楕円型リスク要因に対する VaR の劣加法性を満たす。従って、この場合にはコヒーレントとなる。

定義 : 楕円型分布

$\mathbf{X}$ が楕円型分布に従うとは次のとおりである。
ただし、 $\mathbf{Y}$ は球型確率ベクトル ($S_k(\Psi)$)、 A は定数行列、 μ は定数ベクトル

$$\mathbf{X} = \mu + A\mathbf{Y}$$

定理 : 楕円型リスク因子に対する VaR の劣加法性

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{L : L = \lambda_0 \sum_{i=1}^d \lambda_i X_i, \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\ L_1 + L_2 &\in \mathcal{M}, \quad 0.5 \leq \alpha < 1 \text{ に対して} \\ \text{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) &\leq \text{VaR}_\alpha(L_1) + \text{VaR}_\alpha(L_2) \text{ が成り立つ。} \end{aligned}$$

(証明はつぎのとおりである。)

$$L = \|\lambda' X\| = \|\lambda' A\|Y + \lambda' \mu$$

$$L = \|\lambda' A\|Y_1 + \lambda' \mu$$

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \|\lambda' A\| \text{VaR}_\alpha(Y_1) + \lambda' \mu$$

$$L_1 = \lambda_1' X, \quad L_2 = \lambda_2' X \quad \text{とおく}$$

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)' A\| \leq \|\lambda_1' A\| + \|\lambda_2' A\|, \quad \alpha \geq 0.5 \text{ に対して } \text{VaR}_\alpha(Y_1) \geq 0$$

$$\text{よって、} \text{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) \leq \text{VaR}_\alpha(L_1) + \text{VaR}_\alpha(L_2)$$

QED

B.3 期待ショートフォール (ES) の評価

期待ショートフォール (Expected Shortfall: 以下 ES) の定義は次のとおりである。ES については、補題の ES 順序等計量による表現と同値である。この補題の定義を用いることにより、下記の定理のとおりに、ES のコヒーレント性を証明できる。

定義：期待ショートフォール (ES)

$q_\alpha(F) := F^\rightarrow(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$ 、(分布関数 F に対して、一般化逆関数 $F^\rightarrow$ は分位関数という)

これは、次の表現と同じである。

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_L) dx, \quad ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) dx, \quad ES_\alpha = \frac{E(L; L \geq q_\alpha(L))}{1-\alpha} = E(L | L \geq VaR_\alpha)$$

補題：ES の順序統計量による表現

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]} L_{i,n}}{[n(1-\alpha)]} = ES_\alpha$$

(証明は、Acerbi and Tasche, “On the coherent of expected shortfall” (2002.4) を参照願う。)

命題：ES のコヒーレント性

期待ショートフォール (ES) はコヒーレントである。

(証明はつぎのとおりである。)

移動不変性、正の同次性および単調性は、 $ES_\alpha = 1/(1-\alpha) \int_\alpha^1 VaR_u(L) dx$ と分位関数の性質から明らかである。

任意の m 、 $1 \leq m \leq n$ に対して

$$\sum_{i=1}^m L_{i,n} = \sup\{L_{i_1} + \dots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\} \text{ が成立する}$$

$$\sum_{i=1}^m (L + \tilde{L})_{i,n} = \sup\{(L + \tilde{L})_{i_1} + \dots + (L + \tilde{L})_{i_m} : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$$

$$\leq \sup\{L_{i_1} + \dots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\} + \sup\{\tilde{L}_{i_1} + \dots + \tilde{L}_{i_m} : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$$

$$= \sum_{i=1}^m L_{i,n} + \sum_{i=1}^m \tilde{L}_{i,n}$$

$m = [n(1-\alpha)]$ とおき、 $n \rightarrow \infty$ とする。

$$ES_\alpha(L + \tilde{L}) \leq ES_\alpha(L) + ES_\alpha(\tilde{L})$$

QED

C.合計値の分布（中心極限定理）

合計値の分布について以下のとおり説明する。なお、本項目執筆にあたり、伊藤清「確率論」（1991）、Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”(1997)を参考にした。

中心極限定理によると、確率変数 $X_1, \dots, X_n$ が iid (independent identically distributed) で有限な分散を持つとき、 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ を検討する。このとき、 $(S_n - a_n)/b_n$ は標準正規分布に分布収束するがよく知られている。なお、 $a_n = nE(X_1)$, $b_n = \sqrt{n \text{var}(X_1)}$ である。これが、次に定める中心極限定理 (Central Limit Theorem) である。なお、次のリンデバーク (Lindeberg) の条件を満たすことが必要である。

定義：リンデバーク (Lindeberg) の条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n E\{(X_k - E(X_k))^2, |X_k - E(X_k)| \geq \varepsilon \sqrt{\text{var}(S_n)}\} = 0$$

定理：中心極限定理 (Central Limit Theorem : CLT)

Lindeberg の条件を満たすならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = \Phi(x)$,

ただし、 $x \in \mathbb{R}$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $a_n = nE(X_1)$, $b_n = \sqrt{n \text{var}(X_1)}$
 $\Phi(x)$ は標準正規分布、

(証明は、伊藤清「確率論」などを参照願う。)

D.最大値 (Maxima) の分布 (EVT)

1 変数の最大値の極値理論について以下のとおり説明する。前記 C.合計値の分布によって、各観測データの合計を平均値と分散値によって正規化した分布は、標準正規分布に収束することがわかった。本項目では、各観測データの最大値に一定の正規化を行うことにより、3種類の分布のいずれかに収束することを説明する。なお、本項目執筆にあたり、Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance” (1997)、Alexander J. MacNeil, Rüdiger Frey, Paul Embrechts, “Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools” (2005)などを参考にした。

D.1 一般化極値分布 (GEV) への収束

最大値を基準化定数列で正規化した分布が収束する分布は、次に定義するフレシェ (Fréchet) 分布 $\Phi_\alpha(x)$ 、ワイブル (Weibull) 分布 $\Psi_\alpha(x)$ およびグンベル (Gumbel) 分布 $\Lambda(x)$ の3種類の分布のいずれかである。

定義：最大値の3種類の極値分布

$$\begin{aligned} \text{フレシェ (Fréchet) 分布 } \Phi_\alpha(x) \ (\alpha > 0) : \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \\ \text{ワイブル (Weibull) 分布 } \Psi_\alpha(x) \ (\alpha > 0) : \Psi_\alpha(x) &= \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \\ \text{グンベル (Gumbel) 分布 } \Lambda(x) &: \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)) \end{aligned}$$

これらの3分布は一般化されて、一般化極値 (Generalized Extreme Value : 以下 GEV) 分布として表現できる。この GEV 分布は、位置 (location) パラメータ、スケール (scale) パラメータおよび形状 (shape) パラメータによって特定される。

定義：一般化極値 (GEV) 分布

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)), & \xi = 0 \end{cases}$$

$H_\xi(x)$ は、さらに正規化して $H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = H_\xi((x - \mu)/\sigma)$ と表現できる。このパラメータは次のとおりである。

μ : 位置 (location) パラメータ
 σ : スケール (scale) パラメータ
 ξ : 形状 (shape) パラメータ

GEV 分布において、 $H_{\xi, \mu, \sigma}(x)$ の形状は、 ξ によって決まる。この形状パラメータ $\xi > 0$ のときはフレシェ分布、 $\xi = 0$ のときはグンベル分布、 $\xi < 0$ のときはワイブル分布となる。

基準化数列によって基準化した関数がある関数に収束するとき、次のとおり最大吸引域に属すると定義する。

定義：最大吸引域（Maximum Domain of Attraction：以下 MDA）

ある非退化分布関数 H に対して、次の式が成立するとき、 F は H の最大吸引域（MDA）に属するといひ、 $F \in \text{MDA}(H)$ と記述する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((M_n - d_n)/c_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x)$$

（基準化定数列（normalization sequences） c_n と d_n によって、 M_n を基準化することになる。）

なお、用語は次のとおり定義する。

非退化分布関数（non-degenerate distribution function）：1 点に全確率が集中しない極限分布 iid（independent identically distributed）

確率変数 X_i の最大値 M_n ： $M_n = \max(M_1 + \cdots + M_n)$

$F^n(x) = P(M_n \leq x)$

1 変数の最大値の極値理論で重要な定理が、次のフィシャー・ティペット・グネデンコ（Fisher-Tippett, Gnedenko）の定理である。ある関数の分布 F の最大値を基準化したものは、GEV 分布である H に収束することを定めている。

収束する GEV 分布 H の形状パラメータについては、最大値の属する元の分布 F の種類によって一意的に決まることになる（後記 D.2 参照）。

定理：フィシャー・ティペット・グネデンコ（Fisher-Tippett, Gnedenko）の定理

ある非退化分布関数 H に対して、 $F \in \text{MDA}(H)$ であれば、 H は GEV 分布 $H_\xi(x)$ でなければならない。

（証明は、Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”(1997)および Sidney I. Resnick, “Extreme Value, Regular Valuation, and Point Processes”(1987) などを参照願う。）

D.2 3種類の分布への収束（分類）

(1) 概要

前記 D.1 のフィシャー・ティペット・グネデンコ（Fisher-Tippett, Gnedenko）の定理のとおり、一定の条件を満たす最大値の分布は GEV 分布に収束する。この GEV 分布は、次のフレシェ（Fréchet）分布 $\Phi_\alpha(x)$ 、ワイブル（Weibull）分布 $\Psi_\alpha(x)$ およびグンベル（Gumbel）分布 $\Lambda(x)$ の3つの分布のいずれかである。

(2) 収束する分布の分類

3つの分布のいずれに収束するかは、元の分布の形状に依存し、この形状に応じて基準化定数列 (normalization sequences) c_n と d_n が対応する。これについて、以下のとおり説明する。

a. フレッシュ分布の場合

まず、緩慢変動 (slowly varying) および正則変動 (regularly varying) な関数について次のとおり定義する。

定義：緩慢変動 (slowly varying) および正則変動 (regularly varying) な関数

ルベーグ可測関数 $L(x)$ が緩慢変動 (slowly varying) : $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, t > 0$
ルベーグ可測関数 $h(x)$ が緩慢変動 (regularly varying) : $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\rho, t > 0$
 $h(x) = x^\rho L(x)$

フレッシュ分布の場合には、次の定理のとおり、緩慢変動関数を用いたフレッシュ分布に収束する条件を規定するエレガントな関係が成り立つ。

定理：フレッシュ $\Phi_\alpha(x)$ MDA・グネデンコ (Fréchet MDA, Gnedenko)

$$F \in \text{MDA}(H_\xi) \Leftrightarrow \bar{F}(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x)$$

ただし、 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ 、 $L(x)$ が緩慢変動 (slowly varying) 関数

$c_n^{-1} M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha(x) : \xrightarrow{d}$ は分布収束、 $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}} L_1(n)$ 、 $L_1(n)$ はある緩慢変動関数

(証明は、Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”(1997)および Sidney I. Resnick, “Extreme Value, Regular Variation, and Point Processes”(1987) などを参照願う。)

この定理をパレート分布に適用した事例を説明する。

パレート分布 $F(x) = 1 - \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha$ であり、生存パレート分布 $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha$ である。

緩慢変動 $L(x) = \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{x}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{\kappa x}{\kappa+x}\right)^\alpha$ とする。 $\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha = x^{-\alpha} L(x)$ となる。 $\alpha = 1/\xi$ であるから、 $\bar{F}(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x)$ となる。

b. ワイブル分布の場合

ワイブル分布の場合は次の関係が成り立つ。

定理：ワイブル $\Psi_\alpha(x)$ MDA・グネデンコ（Weibull MDA, Gnedenko）

$$F \in \text{MDA}(H_\xi) \Leftrightarrow x_F < \infty \text{ and } \bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{\frac{1}{\xi}} L(x),$$

右端点（right endpoint） $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$

$$F \in \text{MDA}(H_\xi) \text{ ならば、} c_n^{-1}(M_n - x_F) \xrightarrow{d} \Psi_\alpha(x) : \quad \xrightarrow{d} \text{ は分布収束}$$

$$c_n = x_F - F^{-1}(1 - n^{-1}), \quad d_n = x_F$$

（証明は、Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”(1997)および Sidney I. Resnick, “Extreme Value, Regular Valuation, and Point Processes”(1987) などを参照願う。）

c. ゲンベル分布の場合

ゲンベル分布の場合には、複雑である。次のとおり定義するフォン・ミーゼス（von Mises）分布および裾同値（tail equivalent）性のある分布はゲンベル分布に収束する。

定義：フォン・ミーゼス分布関数

F が $\bar{F}(x) = c \exp \left\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \right\}, z < x < x_F$ という表現を持つとき、 F はフォン・ミーゼス分布関数という。

ただし、 x_F は右端点、 c は正の定数、 a は正の絶対連続関数、 $\lim_{x \rightarrow x_F} a'(x) = 0$

なお、フォン・ミーゼス（von Mises）分布関数は次の条件と同じである。

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{\bar{F}(x) F''(x)}{f^2(x)} = -1$$

定義：裾同値性

分布関数 F と G が裾同値とは、次の 2 条件を満たす場合である。

- ① $x_F = x_G$ (F と G は同一の右端点を持つ)
- ② ある定数 c に対して、 $\lim_{x \rightarrow x_F} \bar{F}(x)/\bar{G}(x) = c$ 、ただし $0 < c < \infty$

D.3 被収束分布の具体例

前記 D2. のとおり、個別の被収束分布が、3 つの分布のうちの如何なる分布に収束するは、被収束分布の形状による。これらを整理すると、別表の＜収束分布の分類（具体例）＞のとおりである。

<収束分布の分類（具体例）>

収束する3つの分布	被収束分布	
フレシェ分布 $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases}$ $\text{MDA}(\Phi_\alpha): \bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x), L \in R_0$ $c_n = F^{-1}(1 - n^{-1}) = n^{\frac{1}{\alpha}}L_1(n)$	パレート分布	$F(x) = 1 - \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha$ $c_n = \frac{\kappa n^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}, d_n = \kappa n^{1/\alpha} - \kappa$
	コーシー分布	$f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$ $c_n = n/\pi, d_n = 0$
	対数ガンマ分布	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{-1} x^{-\alpha} - 1, x > 1, \alpha, \beta > 0$ $c_n = \left\{ (\Gamma(\beta))^{-1} (\ln n)^{\beta-1} n \right\}^{1/\alpha}, d_n = 0$
グンベル分布 $\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$ $\text{MAD}(\Lambda): \bar{F}(x) = c(x) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}$ $x_0 < x < x_F, c(x) \rightarrow c, g(x) \rightarrow 1, a'(x) \rightarrow 0$ $d_n = F^{-1}(1 - n^{-1}), c_n = a(d_n)$	正規分布	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ $c_n = (2 \ln n)^{-1/2}$ $d_n = (2 \ln n)^{1/2} - \frac{\ln(4\pi) + \ln \ln n}{2(2 \ln n)^{1/2}}$
	対数正規分布	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ $c_n = \sigma(2 \ln n)^{-1/2} d_n$ $d_n = \exp \left\{ \mu + \sigma \left((2 \ln n)^{1/2} - \frac{\ln(4\pi) + \ln \ln n}{2(2 \ln n)^{1/2}} \right) \right\}$
	ガンマ分布	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$ $c_n = \beta^{-1}$ $d_n = \beta^{-1} \{ \ln n + (\alpha - 1) \ln \ln n - \ln \Gamma(\alpha) \}$
ワイブル分布 $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ $\text{MDA}(\Psi_\alpha): \bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha}L(x), L \in R_0$ $c_n = x_F - F^{-1}(1 - n^{-1}) = n^{-\frac{1}{\alpha}}L_1(n), d_n = x_F$	一様分布	$f(x) = 1, x \in (0,1)$ $c_n = n^{-1}, d_n = 1$
	ベータ分布	$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1},$ $0 < x < 1, a, b > 0$ $c_n = \left(n \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)} \right)^{-1/b}, d_n = 1$

(出典: Paul Embrechts, Claudia Kluppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events” (1997) より抜粋など)

上記の別表の中から、パレート分布を例に取り、具体的に説明する。パレート分布の最大値は、適切な基準化定数列を取るにより、フレシェ分布に収束する。

具体例：パレート分布のフレシェ分布への収束

パレート分布： $1 - \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha, c_n = \frac{\kappa n^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}, d_n = \kappa n^{1/\alpha} - \kappa$ とすると
 フレシェ分布： $\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha}), x > 0$ に収束する。

(簡単な証明) $F^n(c_n x + d_n) = 1 - \left\{ \frac{\kappa}{\kappa + (c_n x + d_n)} \right\}^\alpha = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right\}^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right\}^n = \exp \left\{ - \left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right\}$$

これは $\xi = 1/\alpha$ としたときの $H_\xi(x) = \exp(-(1+\xi x)^{-1/\xi})$ と同じである。

QED

E. 閾値 (Threshold) の超過分布 (EVT)

1 変数の閾値の超過分布について、以下のとおり説明する。なお、本項目執筆にあたり、Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance” (1997)、Alexander J. MacNeil, Rüdiger Frey, Paul Embrechts, “Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools” (2005)などを参考にした。

E.1 閾値の超過分布

ブロック最大値ではデータが無駄使いする。指定された高い水準を超えるデータなどの閾値 (Threshold) の超過分布に関する極値理論も検討されている。閾値の超過分布 $F_u(x)$ は、一定の条件を満たす場合に、一般パレート分布 (Generalized Pareto Distribution : 以下 GPD) に収束することになる。

まず、閾値の超過分布と平均超過関数を以下のとおり定義する。閾値 u の超過分布 $F_u(x)$ とは、閾値 u を超える場合の分布 x の分布関数である。閾値 u の平均超過関数とは、閾値 u を越える平均値の関数である。

定義：閾値 u の超過分布 (Excess distribution of over threshold u) と平均超過関数 (Mean excess function)

閾値 u の超過分布

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

平均超過関数

$$e(u) = E(X - u | X > u)$$

一般パレート分布 (GPD) とは、次のとおり定義される。 $\xi = 0$ の場合には、 $\xi \rightarrow 0$ の極限值とする関数 $(1 - \exp(-x/\beta))$ として定義されている。

定義：一般パレート分布 (Generalized Pareto Distribution : GPD)

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \xi = 0 \end{cases}$$

閾値の超過分布に関する極値理論における本質的な定理が、次に紹介するピカンズ・バルケマ・デハーン (Pickands-Balkema-de Haan) の定理である。これは、分布関数 F が一般極値 (GEV) 分布の最大値吸引域に属する最大値の収束する関数であることと、 u を右端点 (right endpoint) x_F に近づけたときに F の閾値 u の超過分布関数が一般パレート分布 (GPD) に収束することが、同じであることを意味している。

この適用にあたり、信頼性の高い統計分析を行うため観測データ数をある程度確保する必要性がある一方で、 u を右端点 (right endpoint) x_F を近づける要件から対象となるデータが一層限定されること

になるという背反的な課題がある。

定理：ピカンズ・バルケマ・デハーン（Pickands-Balkema-de Haan）の定理

次の性質を持つ正の可測関数 $\beta(x)$ が存在するための必要十分条件は、 $F \in \text{MDA}(H_\xi)$ である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(x)}(x)| = 0$$

(証明は、Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”(1997)などを参照願う。)

E.2 超過分布によるリスク計量

閾値 u の超過分布を用いて、リスク測度 VaR および ES を計量する方法を紹介する。

なお、次のとおり超過分布 $F_u(x)$ は、GPD でモデル化できると仮定する。

仮定：超過分布の GPD でのモデル化

高い閾値 u に対して、 $\xi \in \mathbb{R}, \beta > 0$ が存在し
 $F_u(x) = G_{\xi, \beta}(x), 0 \leq x < x_F - u$ とする。

上記の仮定が設立する場合に、次のとおり、 VaR と ES を計量できる。

命題： VaR と ES の算出

$$\text{VaR}_\alpha = u + \frac{\beta}{\xi} \left\{ \left(\frac{1-\alpha}{F(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right\}$$

$$\text{ES}_\alpha = \frac{\text{VaR}_\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}$$

(この命題を以下の要領で証明する。)

$F = G_{\xi, \beta}$ の場合

超過分布関数 $F_u(x) = G_{\xi, \beta(u)}(x), \beta(u) = \beta + \xi u$ となる。

$$\therefore F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{-\left\{1 + \left(\frac{\xi}{\beta}\right)(x+u)\right\}^{-1/\xi} + \left\{1 + \left(\frac{\xi}{\beta}\right)u\right\}^{-1/\xi}}{\left\{1 + \left(\frac{\xi}{\beta}\right)u\right\}^{-1/\xi}} = 1 - \left\{1 + \frac{\xi}{\beta + \xi u} x\right\}^{-1/\xi}$$

平均超過関数 $e(u)$ は次のとおりとなる。

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta(x)}{1-\xi} = \frac{\beta + \xi u}{1-\xi}$$

$\therefore F = G_{\xi, \beta(u)}(x)$ ならば、 $F_u(x) = G_{\xi, \beta}(x), \beta(u) = \beta + \xi u$

GPDの平均は、 $E(X) = \frac{\beta}{1-\xi}$

上記仮定が成り立つ場合には、 u より高い閾値 v に関する次の算式が成立する。

$$F_v(x) = G_{\xi, \beta + \xi(v-u)}(x), \quad v \geq u$$

$$\therefore \bar{F}_v(x) = \frac{\bar{F}(v+x)}{\bar{F}(v)} = \frac{\bar{F}(u+(x+v-u))}{\bar{F}(u)} \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(u+(v-u))} = \frac{\bar{F}_v(x+v-u)}{\bar{F}_v(v-u)} = \frac{\bar{G}_{\xi, \beta}(x+v-u)}{\bar{G}_{\xi, \beta}(v-u)} = \bar{G}_{\xi, \beta + \xi(v-u)}(x)$$

これより、

$$e(v) = \frac{\beta(v)}{1-\xi} = \frac{\beta + \xi(v-u)}{1-\xi} = \frac{\xi v}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}$$

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x-u}{\beta} \right)^{-1/\xi}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x | X > u) = \bar{F}(u) P(X - u > x - u | X > u) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(x - u) \\ &= \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x-u}{\beta} \right)^{-1/\xi} \end{aligned}$$

高順位点 α とすると、 $F(x) = \alpha, x = q_\alpha(F)$ となる。

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - \alpha$$

$$\bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x-u}{\beta} \right)^{-1/\xi} = \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{q_\alpha(F)-u}{\beta} \right)^{-1/\xi}$$

$$\text{よって、} \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{q_\alpha(F)-u}{\beta} \right)^{-1/\xi} = 1 - \alpha$$

$\text{VaR}_\alpha = q_\alpha(F)$ であるから、

$$\text{VaR}_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\beta}{\xi} \left\{ \left(\frac{1-\alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right\} \text{ となる。}$$

VaR_α を超えた超過損失は $F_{\text{VaR}_\alpha} = G_{\xi, \beta + \xi(\text{VaR}_\alpha - u)}$ を満たす GPD に従う。ES は VaR_α にこの超過損失の平均を加えた値になる。

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha &= \text{VaR}_\alpha + e(\text{VaR}_\alpha) \\ &= \text{VaR}_\alpha + \frac{\xi \text{VaR}_\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi} = \frac{\text{VaR}_\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi} \end{aligned}$$

QED

F.コピュラ (Copula)

コピュラについて以下のとおり説明する。なお、本項目執筆にあたり、Roger B. Nelsen, “An Introduction to Copulas, Second Edition” (2006)、Alexander J. MacNeil, Rüdiger Frey, Paul Embrechts, “Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools” (2005)などを参考にした。

F.1 コピュラの定義

コピュラ (Copula : 接合関数とも翻訳される) とは、次の 3 つの条件を満たす周辺分布が標準一様分布となる $[0, 1]^d$ 上の分布関数である。スクラーの定理で説明するとおり、この関数が分布関数の接合において重要な役割を担う。

定義 : コピュラの定義

- ① $C(u_1, \dots, u_d)$ は、各成分 u_i について単調増加である。
- ② $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$
- ③ $\sum_{i_1}^2 \dots \sum_{i_d}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$ 、ただし $u_{j1} = a_j, u_{j2} = b_j \quad j \in \{1, \dots, d\}$

F.2 スクラーの定理

スクラーの定理によると、連続な周辺分布を持つ分布関数において、周辺分布を接合するコピュラは一意的に定まる。逆に、コピュラを活用することにより、一定の条件を充足する複数の 1 変数の分布関数を 1 つの多変数分布関数に接合できる。この定理が、多変数の分布関数を取扱う上で重要な役割を担う。

定理 : スクラー (Sklar) の定理

- F は周辺分布 $F_1, \dots, F_d$ を持つ分布関数とする。
- (1) コピュラ $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ が存在し、 $F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ 、 $-\infty \leq x_d \leq \infty$ 周辺分布 $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ が連続であれば、コピュラ C は一意的に定まる。
 - (2) 逆に、 $F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$ によって、 $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ が 1 変数の分布関数で、 C がコピュラであれば、 $F(x_1, \dots, x_d)$ を定義できる。ただし、 $-\infty \leq x_d \leq \infty$
 - (3) 更に、コピュラは $C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$ となる。なお、 $F_1^{-1}(u_1)$ は逆関数を表す。
(注) 周辺分布が連続でない場合には、コピュラは一意的でない。

(証明は、Roger B. Nelsen, “An Introduction to Copulas, Second Edition” (2006)などを参考願う。)

F.3 各種コピュラ

よく使用されるコピュラには、クレイトン・コピュラ (Clayton copula)、グンベル・コピュラ (Gumbel copula)、ガランボス・コピュラ (Galambos copula)、ガウシアン・コピュラ (Gaussian copula)、t コピュラ (t copula) などがあり、これらは以下のとおり定義される。

(1)クレイトン・コピュラ

クレイトン・コピュラ (Clayton copula) は次のとおり定義される。

$$C^{Cl}(u_1, \dots, u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} + 1 - d)^{-1/\theta}$$

(2)グンベル・コピュラ

グンベル・コピュラ (Gumbel copula) は次のとおり定義される。

$$C^{Gu}(u_1, \dots, u_d) = \exp \left\{ - \left[(-\ln(u_1))^\theta + \dots + (-\ln(u_d))^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$$

(3)ガランボス・コピュラ

ガランボス・コピュラ (Galambos copula) は次のとおり定義される。

$$C^{Gal}(u_1, \dots, u_d) = u_1 \dots u_d \exp \left\{ \left[(-\ln(u_1))^{-\theta} + \dots + (-\ln(u_d))^{-\theta} \right]^{-1/\theta} \right\}$$

(4)ガウシアン・コピュラ

は次のとおり定義される。

$$C_p^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_P \{ \Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d) \}$$

ただし、 Φ は標準正規分布、 Φ_P は同時分布関数で、 P は相関係数の行列

(5)t コピュラ

t コピュラ (t copula) は次のとおり定義される。

$$C_{v,P}^t(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{T}_{v,P} \{ t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d) \}$$

ただし、 t_v は自由度 v の t 分布、 $\mathbb{T}_{v,P}$ は同時分布関数で、 P は相関係数の行列

G. 多変数の極値分布（最大値）（EVT）

多変数の極値分布について以下のとおり説明する。なお、本項目執筆にあたり、Alexander J. MacNeil, Rüdiger Frey, Paul Embrechts, “Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools” (2005)、Harry Joe, “Multivariate Models and Dependence Concepts” (1997)、Janos Galambos, “The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, second edition” (1987)、Roger B. Nelsen, “An Introduction to Copulas, Second Edition” (2006)などを参考にした。

G.1 多変数の最大値

多変数の極値分布は、1変数の周辺分布の極値分布をコピュラで接合することが基本的な考え方である。多変数の最大値の極値分布に関しては、前記フィッシャー・ティペット・グネデンコ（Fisher-Tippett, Gnedenko）の定理（D.最大値の分布）により、周辺分布はフレシェ（Fréchet）分布 $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ 、ワイブル（Weibull）分布 $\Psi_\alpha(\mathbf{x})$ およびグンベル（Gumbel）分布 $\Lambda(\mathbf{x})$ の3つの極値分布のいずれかに収束する。そして、周辺分布の極値分布を接合して多変数極値分布を生成する役割を極値コピュラ（Extreme Value Copulas : 以下 EV コピュラ）が担う。

まず、多変数の極値分布である多変数極値分布（Multivariate Extreme Value Distribution : 以下 MEV 分布）と最大吸引域を次のとおり定義する。

定義：多変数極値（MEV）分布と最大吸引域

ある F と H に対して、次の関係が成りたつとき、

F は H の最大吸引域に属するという。これを、 $F \in \text{MDA}(H)$ と記述する。

H は多変数極値分布（Multivariate Extreme Value Distribution : MEV 分布）という。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((M_n - d_n)/c_n \leq \mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n + d_n \mathbf{x}) = H(\mathbf{x})$$

ただし、

$\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n$ は $\mathbb{R}^d$ の値をとる iid 確率ベクトル

同時分布関数 : F

周辺分布 : $F_1 \cdots F_d$

ベクトルの成分 : $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \cdots, x_{i,d})$: d 個の異なるタイプの損失

J 番目の成分の最大値 $M_{n,j} = \max(x_{1,j}, \cdots, x_{n,j})$

$$M_n = (M_{n,1}, \cdots, M_{n,d})$$

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} = \left(\frac{M_{n,1} - d_{n,1}}{c_{n,1}}, \cdots, \frac{M_{n,d} - d_{n,d}}{c_{n,d}} \right)$$

H が非退化周辺分布を持つ場合には、これらの分布はフレシェ分布、グンベル分布およびワイブル分布のいずれかの 1 変数の極値分布でなければならない。さらに、これらの周辺分布は連続なので、スクラーの定理により H は一意的なコピュラを持つ。

多変数極値理論では、EV コピュラが極値周辺分布を接合する役割を担う。EV コピュラは次で定義する最大安定値によって導かれ、スケーリングに関して特殊な性質を持つ。

定義：最大値安定（Max-stable）

コピュラが最大値安定とは、次の関係が成り立つことをいう。
 $C^t(\mathfrak{u}^{1/t}) = C(\mathfrak{u})$ あるいは $C^t(\mathfrak{u}) = C(\mathfrak{u}^t)$

ただし、 $\mathfrak{u} = (u_1 \cdots u_n)$

例えば、グンベル・コピュラは次の簡単な計算から最大値安定であることがわかる。

$$\begin{aligned} H_\theta(u_1, u_2) &= \exp\{-[\exp(-\theta x_1) + \exp(-\theta x_2)]^{1/\theta}\} \\ C_\theta(u_1, u_2) &= \exp\{-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\} \\ C_\theta^r(u_1^{\frac{1}{r}}, u_2^{\frac{1}{r}}) &= C_\theta(u_1, u_2) \\ C_\theta(u_1, u_2) &= \exp\{-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\} \end{aligned}$$

定義：EV コピュラ (Extreme Value Copula)

コピュラが、EV コピュラ（Extreme Value Copula）であるとは、は最大値安定（Max-stable）となることである。

次の定理から有限な最大値の分布を結合するコピュラは、最大安定値を満たす。従って、EV コピュラは最大値の分布を結合するコピュラである。

定理 最大値のコピュラ

C がコピュラならば、 $C_{(n)}(\mathfrak{u}) = C^n(\mathfrak{u}^{1/n})$ もコピュラである。

さらに、 $\mathfrak{u}$ がコピュラ C を持つ iid (independent identically distributed) であれば、 $C_{(n)}(\mathfrak{u})$ は $U_{1(n)} = \max\{U_{1i}\} \cdots U_{d(n)} = \max\{U_{di}\}$ のコピュラである。

(証明は次のとおりである。)

$$\begin{aligned} U_{1(n)} &= \max\{U_{1i}\} \cdots U_{d(n)} = \max\{U_{di}\} \\ P(U_{1(n)} \leq u_1) &= P(\text{all } U_{1i} \leq u_1) = P(U_{11} \leq u_1)^n, \dots, P(U_{d(n)} \leq u_1) = P(\text{all } U_{di} \leq u_1) = P(U_{d1} \leq u_1)^n \\ F_{1(n)}(x_1) &= (F_1(x_1))^n, \dots, F_{d(n)}(x_d) = (F_d(x_d))^n \\ H_{(n)}(\mathbf{x}) &= P(X_{1(n)} \leq x_1, \dots, X_{d(n)} \leq x_d) = P(\text{all } X_{1i} \leq x_1, \dots, \text{all } X_{di} \leq x_d) = [H(\mathbf{x})]^n = [C(F(\mathbf{x}))]^n \\ &= [C(F_{1(n)}(x_1)^{1/n}, F_{d(n)}(x_d)^{1/n})]^n = C^n(\mathfrak{u}^{1/n}) \\ H_{(n)}(\mathbf{x}) &= C_{(n)}(\mathfrak{u}) \text{ である。} \\ \text{よって、} C_{(n)}(\mathfrak{u}) &= C^n(\mathfrak{u}^{1/n}) \end{aligned}$$

QED

次の EV コピュラの定理から、元の多変数分布 F が多変数極値分布 H の最大吸引域に属する場合に、 F のコピュラの極限として一意的に定まるコピュラは EV コピュラであることがわかる。なお、EV コピュラは MEV 分布のコピュラの候補であり、全ての EV コピュラが MEV 分布のコピュラとなるわけではない。

定理：多変数の最大吸引域と EV コピュラ

GEV 周辺分布を持つ F と H に対して、 $F \in \text{MDA}(H)$ が成立する場合、 H のコピュラ C は、EV コピュラ ($C^t(\mathbf{u}) = C(\mathbf{u}^t)$) である。

(証明は、Janos Galambos, “The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, second edition” (1987)などを参照願う。)

コピュラ吸引域とは定義は次のとおりである。多変数分布 F のコピュラ C が多変数極値分布のコピュラ吸引域 CDA に属することが、多変数分布 F が最大吸引域 MDA に属するための条件の一つになる。

定義：コピュラ吸引域 (Copula Domain of Attraction)

ある C および EV コピュラ C_0 について、次式が成り立つとき、 C は C_0 のコピュラ吸引域 (Copula Domain of Attraction) に属するという。このことを、 $C \in \text{CDA}(C_0)$ と記述する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C^t \left(u_1^{\frac{1}{t}}, \dots, u_d^{\frac{1}{t}} \right) = C_0(u_1, \dots, u_d)$$

多変数分布 F が最大吸引域 MDA に属するための必要十分条件は、次の定理のとおり、① F の各周辺分布 F_i がそれぞれの最大吸引域 MDA に属し、② 多変数分布 F のコピュラ C が MEV 分布のコピュラ吸引域 CDA に属することである。このことから、MEV 分布の極限のコピュラ C_0 は、コピュラ C のみから決定されることになる。

定理：多変数の最大吸引域 (MDA)

連続な周辺関数 $F_1, \dots, F_d$

$F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$

$H(\mathbf{x}) = C_0(H_1(x_1), \dots, H_d(x_d))$ は、EV コピュラ C_0 を持つ MEV 分布

$F \in \text{MDA}(H)$ であるための必要十分条件は、 $1 \leq i \leq d$ に対して次の 2 条件が成立することである。

① $F_i \in \text{MDA}(H_i)$

② $C \in \text{CDA}(C_0)$

(証明は、Janos Galambos, “The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, second edition” (1987)などを参照願う。)

G.2 ピカンズ表現

次のピカンズの表現定理により、EV コピュラを周辺分布から生成する方法がわかる。

定理：ピカンズ表現 (Pickands representation)

コピュラ C が、EV コピュラとなる必要十分条件は、次の表現を持つことである。

$$C(\mathbf{u}) = \exp \left\{ B \left(\frac{\ln u_1}{\sum_{k=1}^d \ln u_k}, \dots, \frac{\ln u_d}{\sum_{k=1}^d \ln u_k} \right) \sum_{i=1}^d \ln u_i \right\}$$

$$B(\mathbf{w}) = \int_{S_d} \max(x_1 w_1, \dots, x_d w_d) dH(\mathbf{x})$$

H は d 次元単体 S_d 上の有限測度である。

$$S_d = \{ \mathbf{x} : x_i \geq 0, i = 1, \dots, d, \sum_{i=1}^d x_i = 1 \}$$

($B(\mathbf{w})$ は EV コピュラの従属関数 (dependence function) と呼ばれることがある。)

(証明は、Janos Galambos, “The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, second edition” (1987)などを参照願う。)

2変量のときのピカンズ表現について、以下のとおり紹介する。

$A(\mathbf{w}) := B((\mathbf{w}, 1 - \mathbf{w})')$ とすることにより、 $B(\mathbf{w})$ を再定義する。

$A(\mathbf{w}) = \int_0^1 \max((1-x)\mathbf{w}, x(1-\mathbf{w})) dH(x)$ とすると、 $C^t(\mathbf{u}) = C(\mathbf{u}^t)$ により、2変量コピュラであるためには、

$$C(u_1, u_2) = \exp \left\{ (\ln u_1 + \ln u_2) A \left(\frac{\ln u_1}{\ln u_1 + \ln u_2} \right) \right\}$$

$\max(\mathbf{w}, 1 - \mathbf{w}) \leq A(\mathbf{w}) \leq 1$, $0 \leq \mathbf{w} \leq 1$ を満たす凸でなければならない。

- 全ての $\mathbf{w}$ に対して、 $A(\mathbf{w}) = 1$ であれば、独立コピュラ
- $A(\mathbf{w}) = \max(\mathbf{w}, 1 - \mathbf{w})$ であれば、共単調コピュラ $\min\{u_1, \dots, u_d\}$
- $A(\mathbf{w}) = -\ln C(e^{-\mathbf{w}}, e^{-(1-\mathbf{w})})$

(証明は、Harry Joe, “Multivariate Models and Dependence Concepts” (1997)を参照願う)

また、グンベル・コピュラやガランボス・コピュラなどは EV コピュラであり、 $A(\mathbf{w})$ による表現の具体例は次のとおりである。

① グンベル・コピュラの場合

$$G_{\theta, \alpha, \beta}^{\text{Gu}}(u_1, u_2) = u_1^{1-\alpha} u_2^{1-\beta} \exp \left\{ - \left((-\alpha \ln u_1)^\theta + (-\beta \ln u_2)^\theta \right)^{1/\theta} \right\}$$

$$A(\mathbf{w}) = (1-\alpha)\mathbf{w} + (1-\beta)(1-\mathbf{w}) + \left((\alpha \mathbf{w})^\theta + (\beta(1-\mathbf{w}))^\theta \right)^{1/\theta}$$

② ガランボス・コピュラ

$$G_{\theta, \alpha, \beta}^{\text{Gal}}(u_1, u_2) = u_1 u_2 \exp \left\{ \left((-\alpha \ln u_1)^{-\theta} + (-\beta \ln u_2)^{-\theta} \right)^{-1/\theta} \right\}$$

$$A(\mathbf{w}) = (1-\alpha)\mathbf{w} + (1-\beta)(1-\mathbf{w}) + \left((\alpha \mathbf{w})^\theta + (\beta(1-\mathbf{w}))^\theta \right)^{1/\theta}$$

G.3 EV コピュラの事例（2 変数パレート分布の場合）

多変数の分布の最大値の収束に関して具体例を説明する。2 変数のパレート分布の最大値は、フレッシュ分布をガランボス・コピュラで接合した分布に収束する。

ステップ 1: 2 変数の生存パレート分布は、クレイトン・コピュラによって 1 変数の生存パレート分布に分解できる。

2 変数パレート分布の生存分布は、 $\bar{F}(x_1, x_2) = \left(\frac{\kappa_1 + x_1}{\kappa_1} + \frac{\kappa_2 + x_2}{\kappa_2} - 1 \right)^{-\alpha}$ である。パレート分布は、

$F_i(x_i) = 1 - \left[\frac{\kappa_i}{\kappa_i + x_i} \right]^\alpha$ であり、この生存パレート分布は $\bar{F}_i(x_i) = 1 - F_i(x_i) = \left[\frac{\kappa_i}{\kappa_i + x_i} \right]^\alpha$ である。

したがって、2 変数の生存パレート分布は、 $\bar{F}(x_1, x_2) = \hat{C}(u_1, u_2) = \left(u_1^{-1/\alpha} + u_2^{-1/\alpha} - 1 \right)^{-\alpha}$ となり、1 変数の生存パレート分布をクレイトン・コピュラ $\hat{C}(u_1, u_2)$ で接合した分布である。

$$\therefore \left(\frac{\kappa_1 + x_1}{\kappa_1} + \frac{\kappa_2 + x_2}{\kappa_2} - 1 \right)^{-\alpha} = \left(\bar{F}_1^{-\frac{1}{\alpha}} + \bar{F}_2^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)^{-\alpha}$$

ステップ 2: 2 変数のパレート分布は、生存クレイトン・コピュラによって、1 変数のパレート分布に分解できる。（ステップ 1 の分布に対する生存分布を考える）。

生存コピュラとコピュラの関係は、 $\hat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$ である。すると、生存クレイトン・コピュラ $C(u_1, u_2)$ は、クレイトン・コピュラ $\hat{C}(u_1, u_2)$ によって次のとおりとなる。

$$C(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \hat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \left((1 - u_1)^{-1/\alpha} + (1 - u_2)^{-1/\alpha} - 1 \right)^{-\alpha}$$

ステップ 3: 2 変数のパレート分布の極限 MEV 分布のコピュラ $C_0(u_1, u_2)$ は、生存クレイトン・コピュラ $C(u_1, u_2)$ の極限である。このコピュラ $C_0(u_1, u_2)$ はガランボス・コピュラとなる。

$$C_0(u_1, u_2) = u_1 u_2 \exp \left\{ \left[(-\ln u_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + (-\ln u_2)^{-\frac{1}{\alpha}} \right]^{-\alpha} \right\}$$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1 - C(1 - s x_1, 1 - s x_2)}{s} = -\ln C_0(\exp(-x_1), \exp(-x_2))$$

ステップ 4: 1 変数のパレート分布の最大値の極値分布はフレッシュ分布に収束する（この証明は前記 D.3 を参照願う）。

ステップ 5: 上記ステップ 1~4 より、2 変数パレート分布の最大値が収束する極限分布は、2 つのフレッシュ分布をガランボス・コピュラで接合した分布となることがわかる。

以上

<参考資料>

- ・伊藤清『確率論』(1991)
- ・財団法人 損害保険事業総合研究所『欧米主要国における ERM（統合リスク管理）およびソルベンシー規制の動向について』(2009.9)
- ・吉澤容一「保険商品の価格（予測と調整）」(2008.3)
- ・吉澤容一「気象現象と損害保険 - 天候デリバティブの価格など -」(2008.12)
- ・吉澤容一「定量的リスク管理のためのモデリング -エコノミック・キャピタル&ストレス・テスト-」(2009.12)
- ・Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath, “Coherent measures of risk”, (1998.7)
- ・CEIOPS, “Solvency II - QIS4 Report” (2008.11)
- ・CEIOPS, “CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : SCR standard formula – Article 111 Non-Life Underwriting Risk (former CP48)(2009.10)
- ・CEIOPS, “Technical specifications for QIS5 (draft)” (2010.4)
- ・CEIOPS, “Guidance on the calibration and application of standardized scenarios for the standard formula SCR” (2010.4)
- ・CEIOPS, “Catastrophe task force report on standardized scenarios for the catastrophe risk module in the standard formula” (2010.6)
- ・Catherine Donnelly and Paul Embrechts, “The devil is in the tails :Actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis”(2010.5)
- ・Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, Thomas Mikosch, “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”(1997)
- ・Janos Galambos, “The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, second edition” (1987)
- ・Harry Joe, “Multivariate Models and Dependence Concepts” (1997)
- ・Alexander J. MacNeil, Rüdiger Frey, Paul Embrechts, “Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools” (2005)
- ・Roger B. Nelsen, “An Introduction to Copulas, Second Edition” (2006)
- ・Sidney I. Resnick, “Extreme Value, Regular Valuation, and Point Processes” (1987)
- ・William L. Rutledge (Senior Super Visors Group: Chairman), “Observation on risk management practices during the recent market turbulence”(2008.3)
- ・SCOR, “Enterprise Risk Management (ERM) : A driving force for the insurance industry”, Focus (2009.10))
- ・Swiss Re, “Natural catastrophes and man-made disasters in 2009 : catastrophes claim fever victims, insured losses fall, Sigma” (No1 / 2010)