

保険商品の価格（予測と調整）

主席研究員 吉澤 容一

目 次

1. はじめに
2. 保険価格の考え方
 - (1) 期待値
 - (2) 保険料計算原理
 - (3) 経済原理
 - (4) 測度変換
3. 予測の実務
 - (1) Bayes 理論
 - (2) 信頼性理論 (Credibility Theory)
 - (3) Bayes 理論と信頼性理論
4. 調整の実務
 - (1) 割増引制度 (BMS)
 - (2) 割増引制度 (BMS) の数理
5. 自動車保険等の状況
 - (1) 米国の状況
 - (2) ヨーロッパの状況
6. 実務における検討
 - (1) 活用可能情報
 - (2) 情報から予測・決定
 - (3) 今後の課題
7. おわりに

- 参考 1. 密度関数・平均・分散等
- 参考 2. デリバティブの価格 (Black-Scholes)
- 参考 3. 測度変換
- 参考 4. Bayes 理論
- 参考 5. 信頼性理論
- 参考 6. 割増引制度 (BMS)

1. はじめに

保険商品の大きな特徴は、商品原価である純保険料¹が販売時点ではわからず、補償する期間が終了してから商品原価が判明することである。保険者は、引受ける保険リスクに類似する過去の事例やデータなどから補償に見合った純保険料を予測するなど、様々な検討・工夫をしてきた。本レポートでは、保険商品の純保険料を算定するにあたり有効と思われる保険価格算定の考え方を整理し、合理的な保険商品の価格算出に役立てることを目的としている。

第2節では、保険商品等の価格算定の理論的な方法について紹介する。保険金の期待値をベースとする方法、効用関数などを活用した経済的方法、ファイナンスでも用いられている測度変換²による方法などである。

第3節では、実務で活用されている保険価格を予測する方法を紹介する。Byaes理論と信頼性理論（Credibility Theory）である。

第4節では、実務で広く活用されており、事故歴等をもとに保険料を調整する方法である割増引制度（Bonus-Malus System：以下「BMS」）を紹介する。

第5節では、自動車保険を例に取り、実際の保険料算定の実態について紹介する。個人情報などのリスク評価に必要な情報の入手が比較的容易である米国では、各種情報をベースに保険料を予測する方法が発達している。一方、EC指令によって規制緩和が進んだとはいえ、ヨーロッパではリスク評価に必要な情報入手が容易ではなく、伝統的に発達してきたBMSが改良・活用されている。

第6節では、情報という観点から保険料の算出方法について考察し、いくつかの今後の課題等についても言及する。

説明にあたり、本文では具体例をあげるなどイメージがわかることを目的とし、数学的な説明はできる限り巻末に設けた「参考1～6」に記述することとした。また、本レポートで対象とする保険料は、営業保険料ではなく純保険料に限定している。

2. 保険価格の考え方

本節では、保険料率を算出するための一般的な理論を簡単に紹介する。

(1) 期待値

収支相当の原則から、保険者の収入である保険料は、支出である保険金を賄える水準でなければならない。保険料は想定する保険金以上でなければ収支がマイナスとなり保険経営は成り立たない。想定する保険金とは、各損害額の発生確率の総和である

¹ 営業保険料から保険者の利益および経費を除いた保険金のファンドとなる部分の保険料であり、危険保険料ともいう。

² ある事象が発生する割合である確率について、裁定機会が生じない（no free lunch）リスク中立的な確率を適用するよう確率測度を変換する方法である。

ことから期待値に等しくなる。このことを算式で記述すると次のとおりである。

$$\text{保険料 Prem} = \text{期待値 } E[x]^3$$

具体例をあげて期待値 $E[x]$ 、さらにバラツキ度合である分散 $\text{Var}(x_i)$ ⁴を説明する。

まず、コインを 6 回投げ、表がでた回数に 1 万円を乗じた金額をもらえんとする。このときの期待値を求める。

6 回投げると、64 通り⁵の裏表のパターンがある。このうち、 k 回表がでる組合せを $\binom{6}{k}$ と記述する⁶。例えば、2 回表がでる組合せは、= 15 通りである⁷。

従って、裏と表のでる確率が等しいとすると、表が 2 回出る確率は 15/64 となる。また、この期待値は、2 万円 \times (15/64) = 30/64 万円となる。

表がでる確率を p 、裏がでる確率を q とすると、コインを 6 回投げて表が k 回出る確率は次のとおり記述できる。

$$6 \text{ 回のうち } k \text{ 回表が出る確率 } \binom{6}{k} p^k q^{6-k}, \text{ ただし } p+q=1, p \geq 0, q \geq 0$$

サイコロを 6 回投げて、表が k 回出る確率、その期待値、確率のグラフは図表 1 のとおりである (k は 0 回から 6 回、 $p=q=(1/2)$)。

次に、期待値からのバラツキ度合をはかる分散 $\text{Var}(x_i)$ について説明する。分散は平均から乖離を 2 乗して確率を乗じた値である。同じ期待値を持った分布であっても、分散が大きいほどバラツキが大きい分布といえる。

³ 期待値 $E(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$ と定義する。

x_i は確率変数、 $f(x_i)$ は x_i の確率密度関数とする。

連続系では、 $E(x) = \int x f(x) dx$ 、と定義する。

⁴ 分散 $\text{Var}(x_i) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ と定義する。

連続系では、分散 $\text{Var}(x) = \int [x - E(x)]^2 f(x) dx$ と定義する。

⁵ $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

⁶ $\binom{6}{k}$ を求める際には、 $\frac{6!}{k!(6-k)!}$ を計算する。

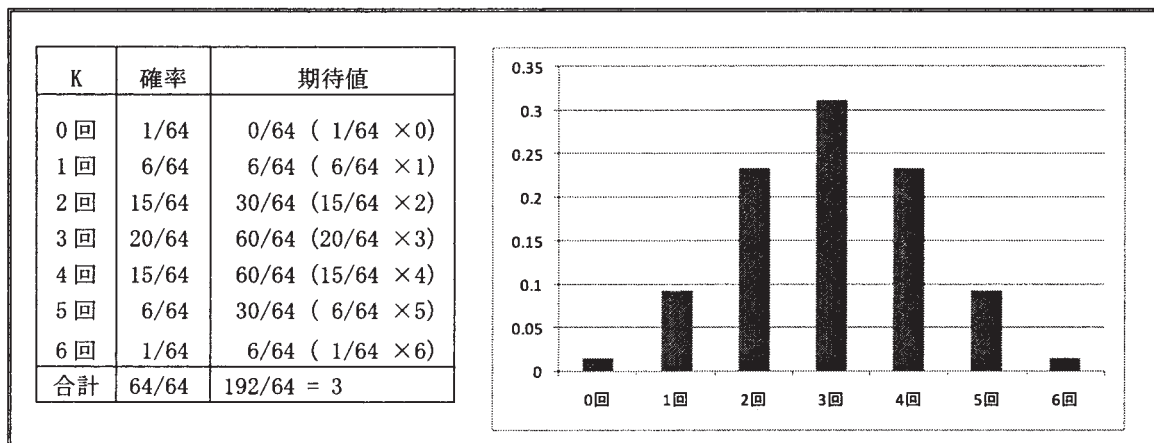
! は階乗と読み、次の意味の演算子である。

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$

⁷ $\frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(4 \times 3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)} = 15$

この例では期待値 $E(x_i) = 3$ であるから、
 分散 $\text{Var}(x_i)$ は、それぞれの値と期待値 3 との差を 2 乗し、確率を乗じた値の合計であるから、であるから、 $3/2$ となる⁸。

図表 1 コイン投げの例 (二項分布)



a. 二項分布

このコイン投げのような分布は二項分布とよばれている。

k 回目に生ずる確率変数 $x_k (k=1, 2, \dots)$ の対象としている事象の実現する確率 p で 1、実現しない場合は $q=1-p$ とする。 $x=x_1+x_2+x_3+\dots+x_n$ は n 回目までの実現回数を表している。 $x=k$ となる確率 $\text{Pr}(x=k)$ を求める。

この確率 $\text{Pr}(x=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ である。ただし $\binom{n}{k}$ は n 個から k 個を選ぶ組み合わせ数である⁹。二項分布とよばれる理由は、 $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ が、 $(p+q)^n$ を二項展開した k

番目の項にあたるためである。二項分布の平均は np 、分散は npq となる¹⁰。

b. 正規分布

このコイン投げを無限に行ったときの確率密度関数は図表 2 のような曲線に収束す

$$^8 \text{Var}(x_i) = \left[(0-3)^2 \left(\frac{1}{64} \right) \right] + \left[(1-3)^2 \left(\frac{6}{64} \right) \right] + \left[(2-3)^2 \left(\frac{15}{64} \right) \right] + \left[(3-3)^2 \left(\frac{20}{64} \right) \right] + \left[(4-3)^2 \left(\frac{15}{64} \right) \right] + \left[(5-3)^2 \left(\frac{6}{64} \right) \right] + \left[(6-3)^2 \left(\frac{1}{64} \right) \right] = \frac{3}{2}$$

⁹ $\binom{n}{k}$ を求める際には、 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ を計算する。

¹⁰ 詳しくは参考 1.A. を参照願う。

る。この確率密度関数を持つ分布を正規分布¹¹という。

平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布は次のとおりであり、 $N(\mu, \sigma)$ と記述する。この分布の密度関数の形状は図表 2 のとおりである。また、平均 0、分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ は標準正規分布といい、分布関数を Φ と記述する。

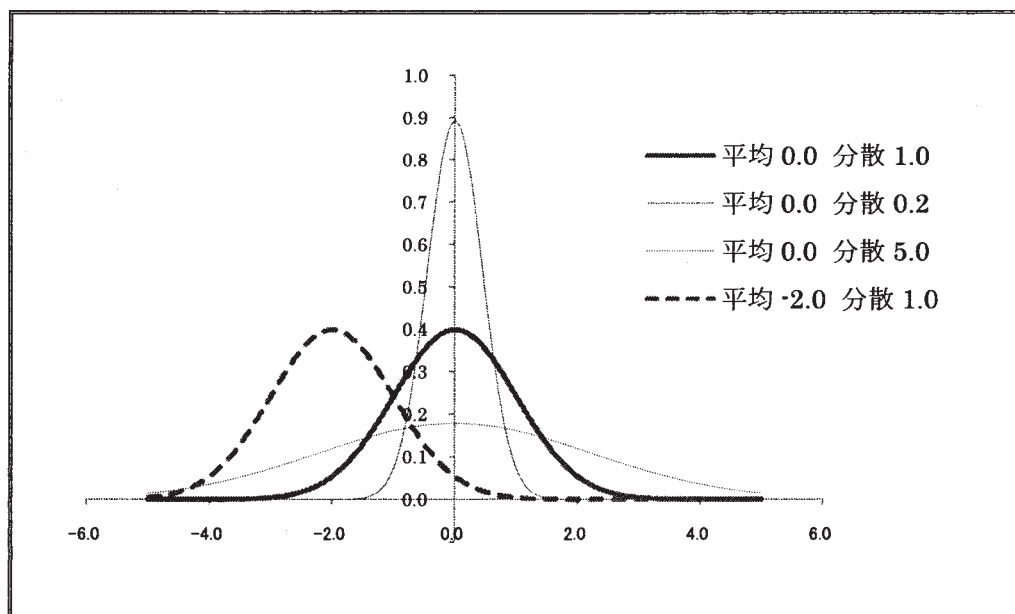
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

なお、 \exp ¹²は exponential の略で「自然対数の底」である。 \exp は e とも記述される。この値は、 $\exp(1) = e \doteq 2.718281828$ と無限につづく超越数である。

分散 σ^2 に対して、この平方根にあたる σ は標準偏差という。

正規分布の場合には、平均 μ から、 σ の間に 68%、 2σ の間に 95%が分布していることがよく知られている。

図表 2 正規分布の密度関数



¹¹ 詳しくは参考 1.B.を参照願う。

¹² \exp の定義は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = e$ である。

さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) = e^x$ である。

微分演算に対しては、 $\frac{d \exp(x)}{dx} = \exp(x)$ となり、微分されても変わらない性質がある。

また、 \exp は、 $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ と無限級数に展開できる。

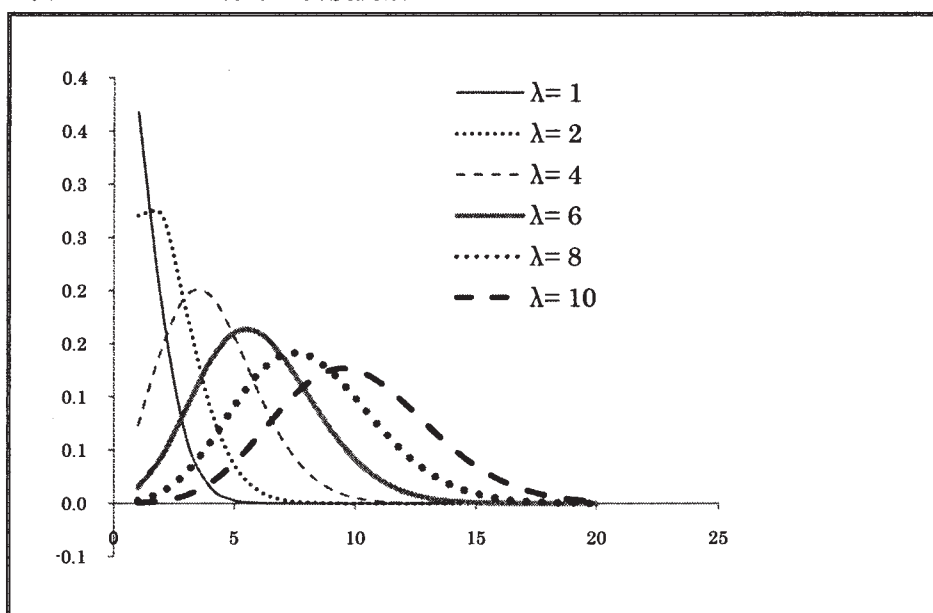
c. ポワソン (Poisson) 分布

二項分布において、実現確率 p が小さく、試行回数 n が非常に大きく、 $np = \lambda$ が一定の場合は、次のようになる。この分布の密度関数は図表 3 のとおりである。

$$\frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}$$

この分布はポワソン (Poisson) 分布といわれ、平均は λ 、分散は λ となることが知られている¹³。

図表 3 ポワソン分布の密度関数



d. 負の二項分布

k 回失敗したうえで、 r 回目の成功を得られる事象の確率密度の分布を負の二項分布という。次の式のとおり、 k 回失敗したうえで $r-1$ 回成功する確率は前記の 2 項分布であり $\binom{r+k-1}{k} p^{r-1} q^k$ とできる。これに $r+k$ 回目に成功する確率 q を乗じて次のとおり負の二項分布¹⁴を求められる。

¹³ 詳しくは参考 1.C.を参照願う。

¹⁴ 詳しくは参考 1.D.を参照願う。

$$\binom{r+k-1}{k} p^{r-1} q^k \cdot p = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k$$

負の二項分布の平均は kq/p 、分散は kq/p^2 であることが知られている。

(2) 保険料計算原理

資本金ゼロの保険会社が保険料を損害保険金の期待値とした場合には、理論的には将来のいずれかの時点において保険者は破産するといわれている。この破産を回避するためには、保険者は期待値を上回る保険料を徴収しなければならない。この上回る水準にはいろいろな考え方があ

る。期待値を上回る保険料水準の決定方法については、スイスの高名なアクチュアリーである Bühlmann が、確率や統計的な手法から導く期待値原理や標準偏差原理などの方法を提唱している¹⁵。

a. 期待値原理

期待値原理は、リスクの期待値の一定割合 α を安全率として上乗せする方法である。

$$\text{保険料 Prem} = (1 + \alpha) \times \text{期待値 } E(x)$$

b. 標準偏差原理

標準偏差原理は、標準偏差の一定割合を上乗せする方法である。分散は期待値からの分布のバラツキ度合であり、バラツキが大きい分布ほどバラツキに比例して安全率を高くとる必要がある。予測と実際の結果は乖離するが、バラツキ度合に応じて一定確率までは乖離しても収支がマイナスにならないよう保険料を決める考え方である。算式で表記すると次のとおりである。

$$\text{保険料 Prem} = \text{期待値 } E(x) + \beta \times \text{標準偏差 } \sigma(x)$$

$$\text{ただし、標準偏差 } \sigma = \sqrt{\text{分散 Var}(x)}$$

c. 分散原理

分散原理は、標準偏差原理と類似した考え方で、分散の一定割合 γ 期待値に上乗せする方法である。分散は標準偏差の 2 乗である。

¹⁵ Bühlmann (1970) を参照願う。

保険料 $Prem = 期待値 E(x) + \gamma \times 分散 Var(x)$

ただし、標準偏差 $\sigma^2 = 分散 Var(x)$

(3) 経済原理

経済原理による方法として、保険者の効用に注目して保険料は保険者が保険を販売することによって得られる効用に注目する方法、経済的な均衡を求める方法などがある。

a. 効用関数

保険者の効用関数を $u(x)$ とする。保険販売しない場合より、保険販売した時の保険者の収支金額 (= 保険料 - 支払保険金) の効用の平均が大きいうように保険料を定めるという考え方である。

即ち、効用関数を $u(x)$ とすると、少なくとも $E[u(Prem - x)] = u(0)$ を満たす保険料 $Prem$ が必要となる。

例えば、効用関数 $u(x) = x - (1/2c)x^2$ とすると、簡単な計算により、保険料 $Prem = 期待値 E[x] + (1/2c) \times 標準偏差 \sigma(x)$ となる¹⁶。

b. 均衡原理

複数の契約者がリスクを交換しあう純粋交換経済を考える。契約者はリスクに晒されているが、契約者間で保険を購入・販売することによってリスクを回避できる。この時、各保険者の効用を最大化する値を保険料とする考え方である。なお、市場全体のリスク交換量の総和はゼロとする。

すべての契約者の効用関数 $u(x)$ を指数関数 $[1 - \exp(h - x)/h]$ とすると、これは次の

¹⁶ $u(x) = x - (1/2c)x^2 \quad (x \leq c)$

$$E\{u[Prem - S(x)]\}$$

$$= \int x\{[Prem - S(x)]dx - (1/2c) \int x\{[Prem - E(S)] + [E(S) - S(x)]\}^2 dx = 0$$

$$[Prem - E(S)] = \left(\frac{1}{2c}\right)\{[Prem - E(S)]^2 + \sigma^2(S)\}$$

$$[Prem - E(S)]^2 - 2c[Prem - E(S)] + \sigma^2(S) = 0$$

$$[Prem - E(S)] = \left(\frac{2c + \sqrt{(2c)^2 - 4\sigma^2(S)}}{2}\right) = c + \sqrt{c^2 - \sigma^2(S)}$$

$$Prem = E(S) + c + \sqrt{c^2 - \sigma^2(S)}$$

$$\doteq E(S) + \frac{\sigma^2(S)}{2c}$$

とおりなることが知られている¹⁷。

$$\text{保険料 Prem} = \frac{E[x \exp(hx)]}{E[\exp(hx)]}$$

(4) 測度変換

ファイナンスにおいては、期待確率ではなく、リスク中立 (risk neutral) 確率という考え方が活用されている。例えば、100 円持っている人がコインを投げて、表がでたら 10 円受取り、裏がでたら 10 円支払うというゲームに参加する場合を考える。コインの裏表の発生確率に差異を認める理由がないので表の発生確率は 1/2、裏の発生確率は 1/2 となる。すると $100 \text{円} + (10 \text{円} \times 1/2 - 10 \text{円} \times 1/2) = 100 \text{円}$ が、このゲーム後の所持金の期待値は 100 円である。

ところで、単純化された効率的な株式市場を考える。ある会社の株式を 100 円で購入し、1 年後にこの会社の事業が成功したら 10 円増えて 110 円になり、事業が失敗したら 10 円減って 90 円になるとする。期間 1 年の国債利回りは 5% とする。この会社の事業が成功するか失敗するか不明であるが、市場は効率的であるため、裁定取引 (arbitrage) の機会はないとする。上記コイン投げのように、事業が成功する確率と失敗する確率はそれぞれ同等で 1/2 と 1/2 という単純な推定は成り立たない。

この場合には、株価が 10 円増加する確率は 3/4、株価が 10 円減少する確率は 1/4 であることが推定される。何故なら、裁定取引が成り立たない (no arbitrage : no free lunch) ことから、この会社の株式購入の期待値は、リスクフリーの国債で運用した場合の元利合計 105 円 ($= 100 \text{円} \times (100\% + 5\%)$) と一致すべきであるからである。株価の期待値が 5 円増額するためには、 $5 \text{円} = 10 \text{円} \times 3/4 - 10 \text{円} \times 1/4$ となるべきである。

この会社が株式のコール・オプション¹⁸の購入を考える (1 年後に、行使価格 100 円とする)。株価が 10 円増加すれば株式と同様に 10 円利益を得られるが、株価が 10 円減額した場合には損失 0 円となる。この場合のコール・オプションの価値は 7.5 円、リスクフリー債券との差額が 2.5 円である。1 年前の現在価値はそれぞれ 105% で割った値である。なお、これらの説明については、図表 4 を参照願う。

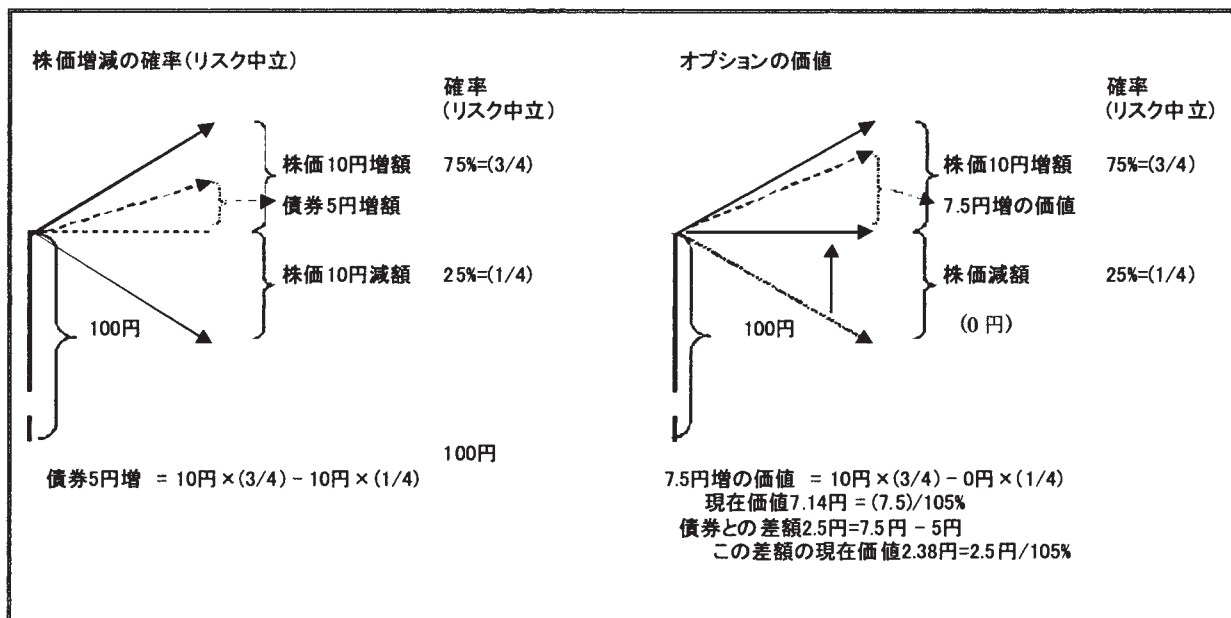
このように、「裁定機会がない」という条件がなければ、株価が増加する確率は 1/2

¹⁷ 詳しくは Bühlmann (1980) を参照願う。

¹⁸ 株式を予め定めた行使価格で購入する権利であり、株価が行使価格以下の場合にはこの権利を行使しない (オプション料のみの負担で済む)。

と思われていたが、この条件によってリスク中立な確率である 3/4 を適用すべきであることが判明した。このことを確率の測度変換という。この測度変換によりオプションの価格も簡単に求めることができた。

図表 4 リスク中立の例



このように、リスク中立となる確率へ測度変換することによって、証券の価値やリスクなどを評価することが広く行われている。

デリバティブの1種であるオプション価格を求める理論は次のとおりであり、発見者である Black and Scholes(1973)や Merton は確率微分方程式の解を求めて1973年にノーベル賞を受賞している (Black氏は故人であったため受賞できず)¹⁹。

$$x N(d_+(T, x)) - K \exp(-r_f T) N(d_-(T, x))$$

ただし、N は正規分布、 $d_{\pm}(T, x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\right) [\log(x/k) + (r_f \pm \sigma^2)T]$

この理論は、その後、Harrison and Kreps(1979)、Harrison and Pliska(1981)によって、上記例のようにリスク中立の確率測度を用いて、次のとおり整理されることになった²⁰。

$$E^Q [(\exp(-r_f T)(x - K))^+]$$

¹⁹ 詳しくは参考 2.A.を参照願う。

²⁰ 詳しくは参考 2.B.を参照願う。

a. Esscher 変換

保険の世界でも測度変換は古くから利用されている。リスクの重みを持たせ調整する考え方が古くから存在する。これは、1930年代にスウェーデンのアクチュアリー Esscher によって提唱された次の Esscher 変換²¹である。これは測度 p による確率密度 $f^p(x)$ を測度変換により測度 Q による確率密度 $f^Q(x)$ に変換するものであり、この変換 $\frac{\exp(hx)}{E[\exp(hx)]}$ による期待値は前記 2.(3)b. の均衡原理の例に一致する。

$$f^Q(x) = \frac{\exp(hx)}{E[\exp(hx)]} f^p(x)$$

この変換を直感的に解釈すると、図表 6 のイメージ図のとおり、リスクに重みを持たせて確率を調整することである。この時の調整係数が h であり、 h の取り方によって、調整後の確率分布が決まる。

この Esscher 変換は柔軟性と頑健性を備えており、いろいろな局面で利用できる。例えば、Esscher 変換を利用することによって、リスク中立確率に変換しオプション価格を算出することができる²²。

Esscher 変換による期待値のリスクマージンは、次のとおり変数 x とこの Esscher 変換による期待値の共分散と解釈できる²³。

$$\text{保険料 Prem} = \text{期待値} E(x) + \frac{\text{Cov}[x, \exp(hx)]}{E[\exp(hx)]}$$

また、正規分布を Esscher 変換した期待値は、

$$\text{保険料 Prem} = \text{期待値} E(x) + h\text{Var}(x) \quad \text{となり、分散原理に一致する}^{24}。$$

²¹ 詳しくは参考 3.A. を参照願う。

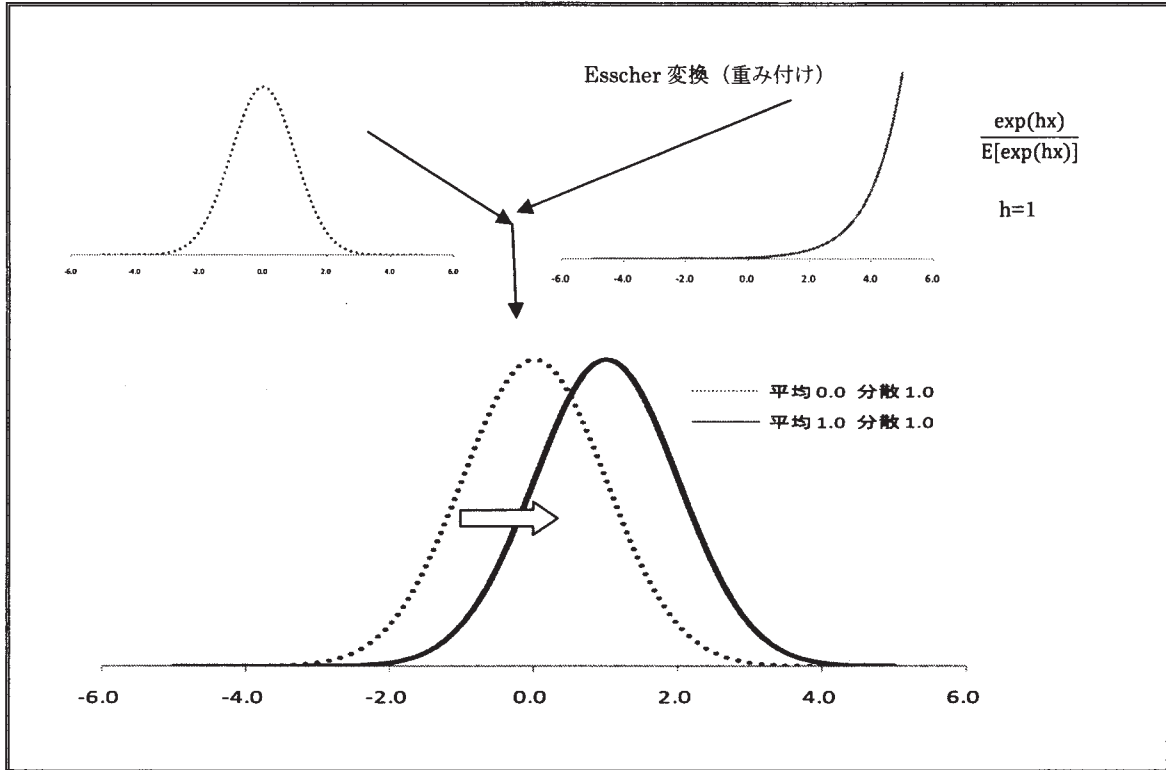
²² 詳しくは参考 3.B. を参照願う。

²³ 共分散 $\text{Cov}(x, y) = E\{[x - E(x)][y - E(y)]\}$ である。

詳しくは参考 3.A. を参照願う。

²⁴ 詳しくは参考 3.A. を参照願う。

図表 5 Esscher 変換のイメージ図 (正規分布の場合)



a. Wang 変換

前述の Esscher 変換は数理でよく利用される対数正規分布には利用できない。Wang 教授が提唱する次の Wang 変換²⁵は、対数正規分布($\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$)についても適用でき、これを正規分布($\log X \sim N(\mu + \lambda \sigma, \sigma^2)$)に変換するなど多様性がある²⁶。このイメージについては図表 6 を参照願う。Wang 変換は次のとおりであり、測度 P による分布から測度 Q による分布に変換する。

$$F^Q(x) = \Phi[\Phi^{-1}F^P(x) - \lambda]$$

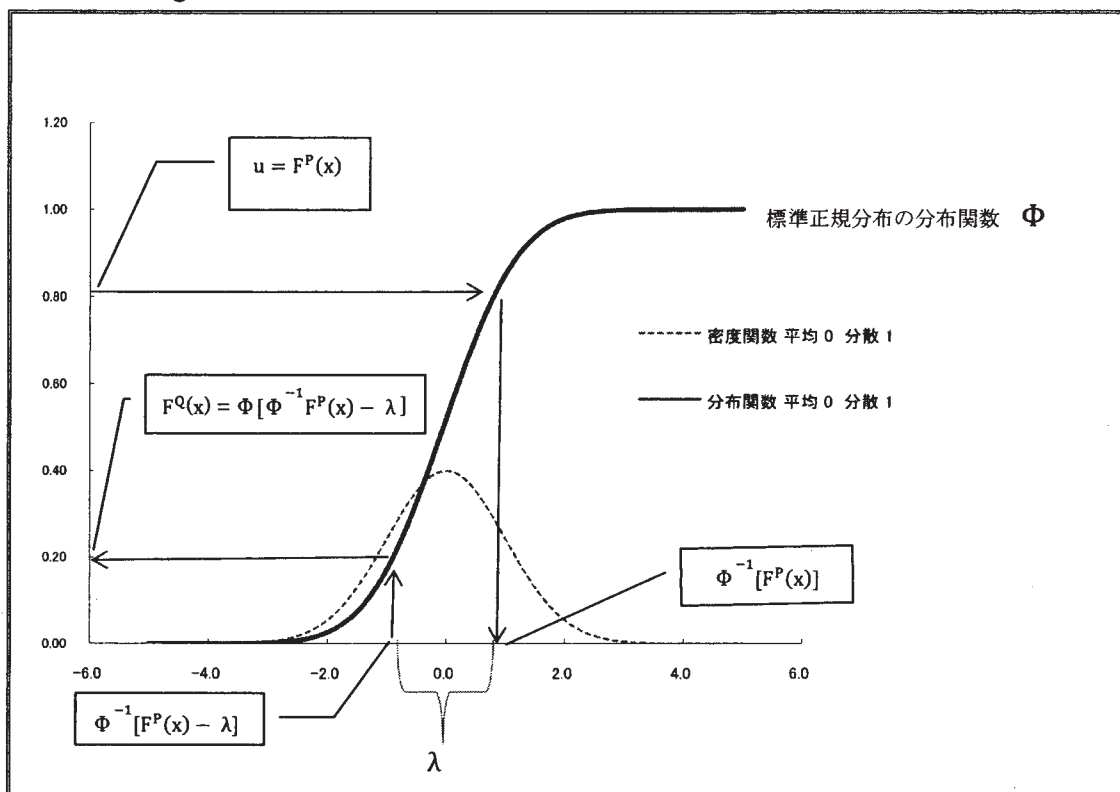
ただし、 Φ は標準正規分布

また、正規分布の Wang 変換は Esscher 変換に一致する。変換結果は次のとおりとなり、分散原理に一致する²⁷。

$$\text{保険料 Prem} = \text{期待値}E(x) + \lambda\sqrt{\text{Var}(x)}$$

²⁵ 詳しくは参考 3.D.を参照願う。
²⁶ 詳しくは参考 3.D.を参照願う。
²⁷ 詳しくは参考 3.D.を参照願う。

図表 6 Wang 変換のイメージ図



(出典：「保険価格決定理論 保険数理とファイナンス理論の融合」をもとに作成)

3. 予測の実務

前節では理論的な事項を説明したが、実際のデータをもとに予測する方法を説明する。なお、本節では計算例を多用するため、単位等を省略することがあるのでご了解願う。

(1) Bayes 理論

a. Bayes の定理

ある事象の事前確率を仮定したうえで、事後確率を予測する理論として Bayes 理論があげられる。Bayes 理論の基本的な原理である Bayes の定理は次のとおりである。この定理を用いることにより、ある事前確率から事後確率を予想する方法に活用できる。

Bayes の定理

$$\Pr(x_2|x_1) = \frac{\Pr(x_1|x_2)\Pr(x_2)}{\Pr(x_1|x_2)\Pr(x_2) + \Pr(x_1|x_2^c)\Pr(x_2^c)}$$

$\Pr(x_2|x_1)$ は事象 x_1 が発生した場合に事象 x_2 が発生する条件付確率。 $\Pr(x_2 \cap x_1)$ は事象 x_1 と事象 x_2 が共に発生する確率、 $\Pr(x_2^c)$ は x_2 が発生しない確率である。

この定理は条件付確率の定義から証明できる²⁸。

Bayes の定理を応用した予測の例をあげる。

ここに、コインが 1 枚、A、B とサイコロが 2 つある。サイコロ A は赤の面が 4 つ、白の面が 2 つである。サイコロ B は赤の面が 2 つ、白の面が 4 つであるとする。コインを投げて表がでればサイコロ A を振り、裏がでればサイコロ B を振ることとする。コインの裏表のいずれがでたか、サイコロ A、B のいずれを振ったかは分からないものとする。

コインを投げてサイコロを振ったところ赤の面がでた場合、コインが表であった確率を求める。

コイン表 : (1/2)	サイコロ A 赤 : (4/6)
	サイコロ A 白 : (2/6)
コイン裏 : (1/2)	サイコロ B 赤 : (2/6)
	サイコロ B 白 : (4/6)

()内は発生確率

コインの裏表の確率に差異はないので、それぞれの確率は 1/2 とする。サイコロの各面での確率は等しいので、それぞれの面がでる確率を 1/6 とする。サイコロ A を振った場合に赤がでる確率は 2/6、すなわち 1/3 である。サイコロ B を振った場合に赤がでる確率は 4/6、すなわち 2/3 である。

Bayes の定理を適用する。

x_1 はサイコロを振ったところ赤の面がでる事象、 x_2 はコインを投げたところ表である事象とする。コインが表である事前確率 $\Pr(x_2)=1/2$ である。本例題は、 x_1 の事象が判明した後の事後確率である $\Pr(x_2|x_1)$ を求めるものである。Bayes の定理を適用すると、次の計算により x_1 発生を条件に x_2 が発生する確率 $\Pr(x_2|x_1)=2/3$ であることがわかる²⁹。

²⁸ この証明は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \Pr(x_2|x_1) &= \Pr(x_2 \cap x_1) / \Pr(x_1) \\ &= \Pr(x_1 \cap x_2) / [\Pr(x_1 \cap x_2) + \Pr(x_1 \cap x_2^c)] \\ &= \Pr(x_1|x_2)\Pr(x_2) / [\Pr(x_1|x_2)\Pr(x_2) + \Pr(x_1|x_2^c)\Pr(x_2^c)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(x_2|x_1) &= \Pr(x_1|x_2)\Pr(x_2) / [\Pr(x_1|x_2)\Pr(x_2) + \Pr(x_1|x_2^c)\Pr(x_2^c)] \\ &= (2/3) \times (1/2) / [(2/3) \times (1/2) + (1/3) \times (1/2)] \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

ここで注意したいの、事前確率 1/2 を仮定していることである。コインの裏表のような場合には単純に 1/2 と推定できる。しかしながら、実際のデータの事前確率は理論的に求めることは難しいので一定の推定が入ることになる。

b. Bayes 予測

上記 a. の仮定する事前確率分布から事後分布を求める理論を適用して、過去のデータから将来の分布の期待値を次のとおり推定することができる。X の条件で x_{n+1} が発生する確率は定義より次式のとおりとなる³⁰。なお、 $f(x_i|x)$ は、条件付確率の密度関数であり、 x が発生したときに x_i の発生確率を表す。

$$E(x_{n+1}|X=x) = \sum x_{n+1} f(x_{n+1}|x)$$

なお、X は x_1 から x_n までの事象を表す。

c. Bayes 予測の計算例

例をあげて説明する。

小さいサイコロと大きいサイコロがそれぞれ 2 個あるとする。小さいサイコロは保険事故の頻度を表し、大きいサイコロは損害額を表すとする。サイコロ小は 1、2 の 2 種類があり、サイコロ大は 1、2 の 2 種類がある。サイコロ小 1 は 1 つの面が事故発生、5 つの面が無事故と書いてある。サイコロ小 2 は 2 つの面が事故発生、4 つの面が無事故と書いてある。サイコロ大 1 は 5 つの面が保険金 2 万円、1 つの面が保険金 10 万円と書いてある。サイコロ大 2 は 4 つの面が保険金 2 万円、2 つの面が保険金 10 万円と書いてある。

小さいサイコロを振って事故発生となった場合に、大きいサイコロを振り保険金が決まるとする。小さいサイコロ 1、2 のいずれを振ったか、大きいサイコロ 1、2 のいずれを振ったかはわからず、結果の保険金のみがわかるものとする。小さいサイコロを振って無事故の場合には保険金はゼロである。

小さいサイコロと大きいサイコロを振った結果が、ゼロ、2 万円、10 万円となった場合、それぞれの条件のもとでの保険金の期待値を上記算式に基づき求める。

保険金の発生確率

			保険金ゼロ	保険金 2 万円	保険金 10 万円
サイコロ小 1	サイコロ大 1	$\theta = \theta_{11}$	5/6	5/36	1/36
	サイコロ大 2	$\theta = \theta_{12}$	5/6	4/36	2/36
サイコロ小 2	サイコロ大 1	$\theta = \theta_{21}$	4/6	10/36	2/36
	サイコロ大 2	$\theta = \theta_{22}$	4/6	8/36	4/36

³⁰ 詳しくは参考 4.A. を参照願う。

(a) 事前確率

まず、事前確率である事象 x_2 の期待値 $E[x_2]$ を求める。

事象は次のとおり 4 とおりに区分され、それぞれの発生には差異はないので発生確率 $\pi(\theta_{ij})$ を 1/4 とする。

この時の各 4 事象の期待値 $\mu_2(\theta_{ij})$ は下記計算結果の表 1. のとおり、それぞれ 20/36、28/36、40/36、56/36 となる³¹。

これらの発生確率はそれぞれ 1/4 であるので、全体の期待値 μ_2 は 1 となる。従って、この 1 が事象 x_2 の事前確率 μ_2 である³²。

計算結果の表 1. $\mu_2(\theta_{ij})$

	$\theta = \theta_{11}$	$\theta = \theta_{12}$	$\theta = \theta_{21}$	$\theta = \theta_{22}$
	小さいサイコロ 1 大きいサイコロ 1 発生確率： 1/4	小さいサイコロ 1 大きいサイコロ 2 発生確率： 1/4	小さいサイコロ 2 大きいサイコロ 1 発生確率： 1/4	小さいサイコロ 2 大きいサイコロ 2 発生確率： 1/4
$\pi(\theta_{ij})$	1/4	1/4	1/4	1/4
$\mu_2(\theta_{ij})$	20/36	28/36	40/36	56/36
$\Pr(X = 0 \theta = \theta_{ij})$	5/6	5/6	4/6	4/6
$\Pr(X = 2 \theta = \theta_{ij})$	5/36 (1/6×5/6)	4/36 (1/6×4/6)	10/36 (2/6×5/6)	8/36 (2/6×4/6)
$\Pr(X = 10 \theta = \theta_{ij})$	1/36 (1/6×1/6)	2/36 (1/6×2/6)	2/36 (2/6×1/6)	4/36 (2/6×2/6)

(b) 事後確率

次に、式 A によって、1 回目の結果である x_1 は判明した条件下での 2 回目 x_2 の事後確率を予測する³³。

保険金がゼロとなる確率、保険金が 2 万円となる確率、保険金が 10 万円となる確率を求めると次のとおりとなる。

$$f(0) = 3/4、f(2) = 3/16、f(10) = 1/16$$

この $f(x)$ は、4 事象 θ_{ij} ごとの保険金がゼロとなる確率、保険金が 2 万円となる確率、保険金が 10 万円となる確率に各保険金を乗じた値を求め、さらに保険金ごと

³¹ $\mu_2(\theta_{ij}) = [0 \times \Pr(X = 0|\theta = \theta_{ij}) + 2 \times \Pr(X = 2|\theta = \theta_{ij})] + [10 \times \Pr(X = 10|\theta = \theta_{ij})]$

³² $\mu_2 = E[x_2] = E[E[x_2|\theta_{ij}]] = E[\mu|\theta_{ij}] = \sum_{i=1, j=1}^{2,2} \mu_2(\theta_{ij})\pi(\theta_{ij})$
 $= [20/36 + 28/36 + 40/36 + 56/36] \times (1/4) = 1$

³³ 別の方法による計算例については参考 4.B. と参考 4.C. を参照願う。

に合計したものである。³⁴

次に、 x_1 と x_2 の結合確率 $f(x_2, x_1)$ を求める。

大小のサイコロを振ることを2回行うこととする。第1回目の結果が x_1 、第2回目の結果を x_2 とする。1回目の保険金ゼロかつ2回目の保険金もゼロから、1回目の保険金10万円かつ2回目の保険金10万円までの9とおりの組み合わせがある。下記の計算結果の表2.のとおり $f(x_2, x_1)$ を求める³⁵。

計算結果の表 2. $f(x_2, x_1)$

$f(x_2, x_1)$	$x_1 = 0$	$x_1 = 2$	$x_1 = 10$
$x_2 = 0$	41/72	13/96	13/288
$x_2 = 2$	13/96	7/177	4/319
$x_2 = 10$	13/288	4/319	3/622

次に条件付確率 $f(x_2|x_1)$ を求める。これは、 x_1 と x_2 の結合確率を x_1 の発生確率で除したものである³⁶。下記の計算結果の表3.のとおりである。

計算結果の表 3. $f(x_2|x_1)$

$f(x_2 x_1)$	$x_1 = 0$	$x_1 = 2$	$x_1 = 10$
$x_2 = 0$	41/54	13/18	13/18
$x_2 = 2$	13/72	205/972	65/324
$x_2 = 10$	13/216	65/972	25/324

初めの試行 x_1 で保険金がそれぞれゼロ円、2万円、10万円となった場合に、2回目の試行 x_2 の保険金の期待値を求める³⁷。

期待値 ($x_1=0$ の場合) は 26/27、期待値 ($x_1=2$ の場合) は $1 + 22/243$ 、期待値 ($x_1=10$ の場合) は $1 + 14/81$ である。

³⁴ $f(x_1) = \sum_{i=1, j=1}^{2,2} f(x_1|\theta_{ij})\pi(\theta_{ij}) = \sum_{i=1, j=1}^{2,2} \Pr(X = x_1|\theta = \theta_{ij}) \times (1/4)$ 、なお、 $f(x_1) = f(x_2)$

上記の計算結果の表1.によって、 $f(x_1)$ は次のとおり求められる。

$$f(0) = [5/6 + 5/6 + 4/6 + 4/6] \times (1/4) = 3/4$$

$$f(2) = [5/36 + 4/36 + 10/36 + 8/36] \times (1/4) = 3/16$$

$$f(10) = [1/36 + 2/36 + 2/36 + 4/36] \times (1/4) = 1/16$$

³⁵ $f(x_2, x_1) = \sum_{i=1, j=1}^{2,2} f(x_2|\theta_{ij})f(x_1|\theta_{ij})\pi(\theta_{ij})$
 $= \sum_{i=1, j=1}^{2,2} \Pr(X = x_2|\theta = \theta_{ij}) \times \Pr(X = x_1|\theta = \theta_{ij})(1/4)$

³⁶ $f(x_2|x_1) = f(x_2 \cap x_1) / f(x_1) = f(x_2, x_1) / f(x_1)$

³⁷ $E[x_2|x_1] = \int x_2 f(x_2|x_1) dx_2 = \sum_{x_2=0,2,10} x_2 f(x_2|x_1)$ であるから、

$$E[x_2|x_1 = 0] = [0 \times (41/54)] + [2 \times (13/72)] + [10 \times (13/216)] = 26/27$$

$$E[x_2|x_1 = 2] = [0 \times (13/18)] + [2 \times (205/972)] + [10 \times (65/972)] = 1 + 22/243$$

$$E[x_2|x_1 = 10] = [0 \times (13/18)] + [2 \times (65/324)] + [10 \times (25/324)] = 1 + 14/81$$

(2) 信頼性理論 (Credibility Theory)

過去の統計データから将来を予測する場合に、データ量が不十分であるなど過去の統計データが十分でない可能性がある。この場合に、補助データで補完し、過去のデータの信頼度 Z と補助データの信頼度 $(1-Z)$ の加重平均により将来を予測する方法がある。この信頼度 Z の推定方法が重要であるが、ここでは有界変動信頼性理論、Bühlmann モデル、Bühlmann モデルを変形した Bühlmann-Straub モデルを説明する。

a. 有界変動信頼理論

保険料を推定するにあたり、過去クレームの件数が十分である場合を n_f とし、実際のクレーム件数がこれより少ない n であった場合に、モデルによって作成した補助データ M によってデータ量不足を補う考え方である。この算式は次のとおりであり、

$$\text{保険料 Prem} = Z\bar{X} + (1-Z)M$$

$$\text{信頼度 } Z = \sqrt{n/n_f}$$

b. Bühlmann モデル

データ件数の少ない個別契約者のデータと、データ量の多い集団全体でのデータの信頼度によって加重平均して保険料を求める考え方である。なお、この信頼度 Z の算出にあたり最適な線形近似を求めるため最小二乗法を用いている³⁸。この方法により、保険料 Prem は次のとおり、個別契約者データ \bar{X} と集団全体でのデータ μ に対して、 na と v で加重平均した値となる。

$$\text{保険料 Prem} = Z\bar{X} + (1-Z)\mu$$

$$\text{信頼度 } Z = na / (na + v) = n/(n+k)、\text{ただし、} k = v/a$$

$$v = E[\text{Var}(x | \Theta)], a = \text{Var}[E(x | \Theta)]$$

具体的に、Bayes の説明で用いた例によって数値を検証する。

まず、 a ³⁹ = 23/162

³⁸ 詳しくは参考 5.A. と参考 5.B を参照願う。

³⁹ $a = \text{Var}[E(x | \Theta)] = \text{Var}[\mu(\theta)]$

$$= E[\mu(\theta)^2] - \mu^2$$

$$= \left[\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{9}\right)^2 + \left(1 + \frac{5}{9}\right)^2 \right] \times (1/4) - (1)^2$$

$$= 23/162$$

また、次の計算結果の表 4. などから、 $v^{40}=5 + (139/162)$ となり、 $k = v/a = 41 + (6/23)$ である。

計算結果の表 4.

	$\theta = \theta_{11}$	$\theta = \theta_{12}$	$\theta = \theta_{21}$	$\theta = \theta_{22}$
$\pi(\theta_{ij})$	1/4	1/4	1/4	1/4
$\mu_2(\theta_{ij})$	20/36	28/36	40/36	56/36
$\mu_2(\theta_{ij})^2$	25/81	49/81	1+(19/81)	2+(34/81)
$E(x^2 \theta = \theta_{ij})$	3+(1/3)	6	6+(2/3)	12
$v(\theta_{ij})$	3+(2/81)	5+(32/81)	5+(35/81)	9+(47/81)

以上から、実測データ数 $n=1$ であるので信頼度 Z は次のとおりとなる。

$$Z = n/(1+k) = 23/972, \quad (1-Z) = 949/972$$

保険金ゼロ、保険金 2 万円、保険金 10 万円の場合の保険金の期待値に信頼性理論を用いて予測すると、それぞれ期待値 ($x_1=0$ の場合) は $949/972$ 、期待値 ($x_1=2$ の場合) は $1+(23/972)$ 、期待値 ($x_1=10$ の場合) は $1+(23/108)$ である⁴¹。Bayes 理論による予測と結果が異なる。

c. Bühlmann-Straub モデル

ビュールマンでは、年次ごとにデータ数が異なる場合に対応できないため、この欠点を補った次のモデルである。なお、 m_i は各年次のデータであり、この合計を m とする⁴²。

$$^{40} E(x^2|\theta = \theta_{11}) = (0^2)(5/6) + (2^2)(5/36) + (10^2)(1/36) = 3 + (1/3)$$

$$E(x^2|\theta = \theta_{12}) = (0^2)(5/6) + (2^2)(1/9) + (10^2)(1/18) = 6$$

$$E(x^2|\theta = \theta_{21}) = (0^2)(2/3) + (2^2)(5/18) + (10^2)(1/18) = 6 + (2/3)$$

$$E(x^2|\theta = \theta_{22}) = (0^2)(2/3) + (2^2)(2/9) + (10^2)(1/9) = 12$$

$$v(\theta_{ij}) = E(x^2|\theta = \theta_{ij}) - \mu_2(\theta_{ij})^2$$

$$v = E[v(\theta)] = E[v(\theta_{11}) + v(\theta_{12}) + v(\theta_{21}) + v(\theta_{22})]$$

$$v = [(3+2/81) + (5+32/81) + (5+35/81) + (9+47/81)] \times (1/4)$$

$$= 5 + (139/162)$$

⁴¹ 保険金ゼロの場合： $949/972$ 万円 [$0 \times (23/971) + 1 \times (949/972)$]

保険金 2 万円の場合： $1 + (23/972)$ 万円 [$2 \times (23/971) + 1 \times (949/972)$]

保険金 10 万円の場合： $1 + (23/108)$ 万円 [$10 \times (23/971) + 1 \times (949/972)$]

⁴² 詳しくは参考 5.A と参考 5.C を参照願う。

$$\text{Prem} = Z\bar{X} + (1-Z)\mu$$

$$\text{信頼度 } Z = m / (m + k)$$

$$\text{ただし、 } k = v/a = E[\text{Var}(X | \Theta)] / \text{Var}[E(x | \Theta)], \quad \bar{X} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{m}{m}\right) X_j$$

(3) Bayes 理論と信頼性理論

前記のとおり、同一事例を用いて Bayes 理論による予測と、信頼性理論の一種である Bühlmann モデルによる予測を行ってきた。これらの数値結果を整理すると図表 7 のとおりとなる（右側が計算してきた分数表示、左側がこの小数表示である）。理論的な事前確率による期待値 1 に対して、Bayes 理論と Bühlmann モデル、試行による保険金額の値 0 円、2 万円、10 万円により期待値はそれぞれ異なる。ケースによっては、信頼理論による予測保険料が Bayes 理論による予測保険料に等しくなる場合があり、的確な信頼性 (exact credibility) とよぶ。

なお、新商品開発のように、Bayes 理論によって予測する際に、事前確率を算出するための情報が不十分、入手不能などのケースがある。この場合には、入手可能な範囲情報から構造的な事前パラメータ (structural prior parameters) を推定したうえで、Bayes 理論を適用する。この方法を経験的 Bayes 予測 (empirical Bayes estimation) とよぶ。

図表 7 Bayes 理論と信頼性理論の結果

	Bayes 理論		信頼性理論		事前確率
	小数表示	分数表示	小数表示	分数表示	
保険金 0 円	0.962962963	26/27	0.976337449	949/972	1
保険金 2 万円	1.090534979	1+(22/243)	1.023662551	1+(23/972)	
保険金 10 万円	1.172839506	1+(14/81)	1.212962963	1+(23/108)	

4. 調整の実務

前節では過去の各種情報から将来の適用すべき保険料を予測する実務的な方法を述べたが、本節では過去の事故情報を直接反映して保険料を算出する方法として、割引制度 (Bonus Malus System : 以下「BMS」) を説明する。

(1) 割増引制度 (BMS)

a. BMS の概要

日本においても自動車保険で適用されている割増引制度 (BMS) は、適用時点での割増引 (正確には満期を迎える当該契約) を起点として、当該契約の過去 1 年間の保険金請求歴によって更改契約のランクが決まりこのランクに対応する割増引が決定する制度

である。BMS は保険料を事前に予測するというよりは、直近のランクと保険金請求歴から将来の保険料率が決まる事後的な保険料決定制度といえる。例えば、下表のような制度である。

事故発生件数によるクラスの推移

クラス	事故ゼロ	事故 1 回	事故 2 回	割増引
1	2	1	1	4/3
2	4	1	1	1
3	4	2	1	1
4	5	2	1	3/4
5	5	2	1	9/16

b. BMS の特性

この BMS の特徴は、①社会制度や技術的な要因でリスクを事前に保険料に反映できない場合であっても事後的に調整でき、良い契約者には廉価な保険料を悪い契約者には高い保険料を適用できること、②タリフやフォーミュラが明確で契約者に事前に示しているの、契約者が事故を起さないよう一層注意することである。

事前予測が大数の法則に基づく統計学によって、多数の被保険者間で収支を相当させる横の広がり（同一時間で多数）であるのに対し、BMS は特定の個人の保険金請求歴で調整し、長期的なライフスパンで収支を相当させる縦の広がり（長期的な時間で特定人）のある制度といえる。

(2) 割増引制度 (BMS) の数理

a. Markov 性

このように、直近の原因によってのみ次の事象が決まることから、BMS は Markov Chain としての性格を有する。このことをクラス移行行列 T とこれに確率を反映した推移行列 M によって表記できる⁴³。

例えば、上記の例（事故発生件数によるクラスの推移）をもとに、 T_k と $M(x)$ を求めると次のとおりとなる。

⁴³ k 回事故を起こす推移 T_k は次のとおりである。

$$T_k = (t_{ij}^{(k)}): T_k(i) = j \text{ のとき } t_{ij}^{(k)} = 1, \text{ それ以外は } t_{ij}^{(k)} = 0$$

$$t_{ij}^{(k)} \geq 0, \sum_j t_{ij}^{(k)} = 1$$

$$\lambda: \text{事故頻度とし、推移確率 } p_{ij}(\lambda) \text{ は、 } p_{ij}(\lambda) = \sum_k p_k(\lambda) t_{ij}^{(k)}$$

$$M(\lambda) = (p_{ij}(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k$$

詳しくは参考 6.A. を参照願う。

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例えば、現在のクラス 1 の保険料 100、クラス 2 の保険料 200、クラス 3 の保険料 300、クラス 4 の保険料 400、クラス 5 の保険料 500 とする。なお、クラスが変更することにより割増引率に変更して保険料は増減するが、例を簡単にするためこの要素は考慮しない。

$$\begin{aligned} \text{保険料のベクトル } b^0 &= (b_1^0, b_2^0, b_3^0, b_4^0, b_5^0) \\ &= (100, 200, 300, 400, 500) \text{ となる。} \end{aligned}$$

事故が 0 回の場合の翌年のクラス別保険料 b^1

$$b^1 = b^0 T_0 = (0, 100, 0, 200 + 300, 400 + 500) = (0, 100, 0, 500, 900)$$

事故が 1 回の場合の翌年のクラス別保険料 b^1

$$b^1 = b^0 T_1 = (100 + 200, 300 + 400 + 500, 0, 0, 0) = (300, 1200, 0, 0, 0)$$

事故が 2 回の場合の翌年のクラス別保険料 b^1

$$b^1 = b^0 T_2 = (100 + 200 + 300 + 400 + 500, 0, 0, 0, 0) = (1500, 0, 0, 0, 0)$$

次に下表「クラスごとの事故発生件数の確率」をもとに、事故発生確率を加味した推移をみる。

クラスごとの事故発生件数の確率

クラス	事故ゼロ	事故 1 回	事故 2 回
1	80%	15%	5%
2	85%	11%	4%
3	90%	7%	3%
4	95%	4%	1%
5	98%	1%	1%

$$M(x) = \begin{matrix} \text{事故発生 0 回} & \text{事故発生 1 回} & \text{事故発生 2 回} \\ \begin{bmatrix} 0\% & 80\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 85\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 90\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 95\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 98\% \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 15\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 11\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 7\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 4\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 1\% & 0\% & 0\% & 0\% \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 5\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 4\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 3\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 1\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 1\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\% + 15\% & 80\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 4\% + 11\% & 0\% & 0\% & 85\% & 0\% \\ 3\% & 7\% & 0\% & 90\% & 0\% \\ 1\% & 4\% & 0\% & 0\% & 95\% \\ 1\% & 1\% & 0\% & 0\% & 98\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\% & 80\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 15\% & 0\% & 0\% & 85\% & 0\% \\ 3\% & 7\% & 0\% & 90\% & 0\% \\ 1\% & 4\% & 0\% & 0\% & 95\% \\ 1\% & 1\% & 0\% & 0\% & 98\% \end{bmatrix}$$

事故が 0 回の場合の翌年のクラス別保険料 b^1

$$b^1 = b^0 T_0 = (0, 100 \times 80\%, 0, 200 \times 85\% + 300 \times 90\%, 400 \times 95\% + 500 \times 98\%) \\ = (0, 80, 0, 440, 870)$$

事故が 1 回の場合の翌年のクラス別保険料 b^1

$$b^1 = b^0 T_1 = (100 \times 15\% + 200 \times 11\%, 300 \times 7\% + 400 \times 4\% + 500 \times 1\%, 0, 0, 0) \\ = (37, 42, 0, 0, 0)$$

事故が 2 回の場合の翌年のクラス別保険料 b^1

$$b^1 = b^0 T_2 = (100 \times 5\% + 200 \times 4\% + 300 \times 3\% + 400 \times 1\% + 500 \times 1\%, 0, 0, 0, 0) \\ = (31, 0, 0, 0, 0)$$

b. MBS の評価

MBS を評価する尺度はいろいろあるが、代表的なものを紹介する。

(a) 相対的な安定的平均水準(RSAL)

BMS の安定性を評価する指標として次の相対的な安定的平均水準(RSAL)がある。

$$\text{相対的な安定的平均水準(RSAL)} = \frac{\text{安定的平均水準} - \text{最低水準}}{\text{最高水準} - \text{最低水準}}$$

図表 8 RSAL の例

N は new、O は old (単位: %)

ランク	国	RSAL	ランク	国	RSAL	ランク	国	RSAL
1	ケニア	28.79	11	タイ	8.03	21	フランス	2.12
2	スペイン	25.67	12	英国 (protected)	7.07	22	ノルウェイ N	2.11
3	マレーシア	21.17	13	ポルトガル	6.75	23	ブラジル	1.85
4	フィンランド N	16.04	14	ノルウェイ O	6.61	24	韓国	1.37
5	スウェーデン	14.20	15	スイス N	6.47	25	ルクセンブルグ N	1.36
6	オランダ	11.78	16	ドイツ N	5.85	26	イタリア N	1.30
7	英国 (protected)	11.37	17	日本 N	4.63	27	ルクセンブルグ O	1.01
8	台湾	9.55	18	ベルギー N	4.05	28	日本 O	0.88
9	フィンランド O	8.46	19	デンマーク	3.78	29	ベルギー O	0.74
10	香港	8.35	20	スイス O	2.90	30	イタリア O	0.01

(出典: Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance をもとに作成)

(b) 弾力性

BMS の弾力性 (elasticity) を測る尺度としてロイマランタ (Loimaranta, 1972) が次の指標 $\eta(\lambda)$ を提唱した。事故頻度 λ 、これに対応する保険料を $P(\lambda)$ とすると次のとおり定義される。この意味は、事故頻度の変化率に対する保険料の変化率の感応度を表している。弾力性 $\eta(\lambda)$ が大きいほど、価格弾力性が高い設計といえる。弾力性が高ければ、優良契約者は早期に高割引率を獲得でき、事故多発契約者には速やかに高い割増率を適用できる。

$$\text{弾力性 } \eta(\lambda) = \frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda} = \frac{d \ln P(\lambda)}{d \ln \lambda}$$

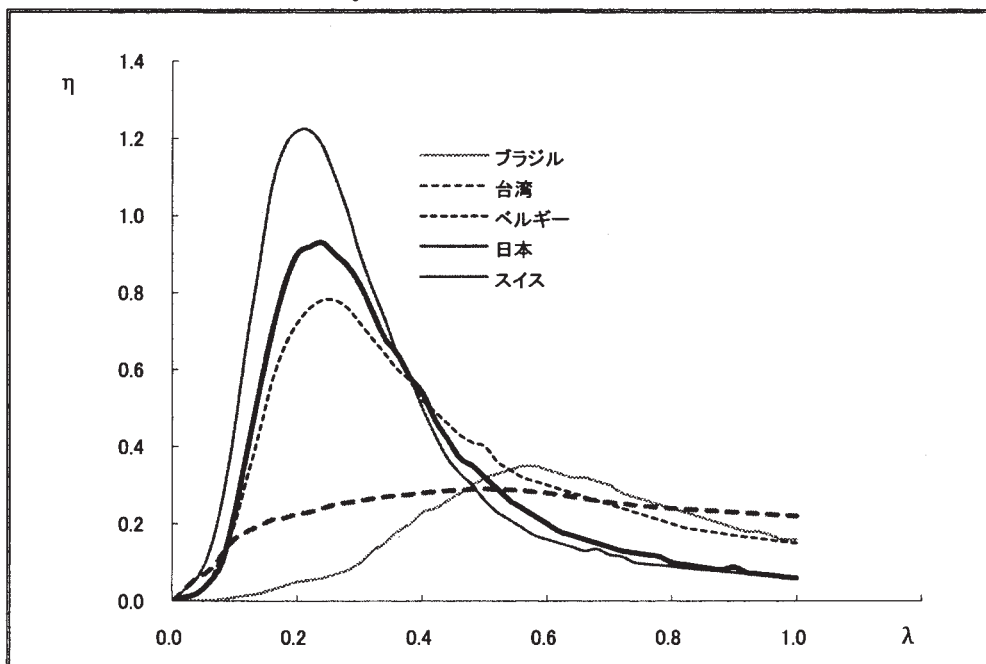
図表9 弾力性 (Elasticity) の例 ($\lambda=0.1$)

Nはnew、Oはold (単位:%)

ランク	国	弾力性	ランク	国	弾力性	ランク	国	弾力性
1	スイス N	0.449	11	ベルギー N	0.195	21	タイ	0.081
2	フィンランド N	0.403	12	フィンランド O	0.194	22	スペイン	0.079
3	スウェーデン	0.298	13	ルクセンブルグ N	0.183	23	韓国	0.078
4	オランダ	0.275	14	マレーシア	0.165	24	イタリア N	0.063
5	ノルウェイ O	0.263	15	デンマーク	0.165	25	ルクセンブルグ O	0.058
6	ドイツ N	0.257	16	台湾	0.136	26	日本 O	0.052
7	ケニア	0.237	17	香港	0.133	27	英国 (protected)	0.051
8	日本 N	0.232	18	英国 (unprotected)	0.129	28	ベルギー O	0.024
9	スイス O	0.208	19	ノルウェイ N	0.127	29	ブラジル	0.011
10	フランス	0.200	20	ポルトガル	0.111	30	イタリア O	0.001

(出典: Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance, 1995 をもとに作成)

図表10 弾力性 (Elasticity) のイメージ図



(出典: Bonus-Malus Systems: The European and Asian Approach to Merit - Rating, 1998 をもとに作成)

Loimaranta の論文に掲載の例をもとに計算すると、次のとおりとなる⁴⁴。

弾力性 $\eta(\lambda)$ ⁴⁵ = 0.20286、ただし $\lambda = 0.2$ とする。

⁴⁴ 詳しくは参考 6.B を参照願う。

$$^{45} b = \sum_{j=1}^5 a_j b_j = 0.70096$$

$$\frac{db}{d\lambda} = \sum_{j=1}^5 \frac{da_j}{d\lambda} b_j = 0.71098$$

$$\eta(\lambda) = \frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda} = \frac{db}{d\lambda} \times \frac{\lambda}{b} = 0.20286$$

(c) 収束率 (rate of convergence)

BMSの第1世代は1950～60年代であり、1990年半ばには第2世代を迎えている。一定期間が経過すると、BMSは定常状態に収束する傾向にある。これを評価する指標として収束率 $(TV)_n$ ⁴⁶がある。これを判断基準の一つとして次世代のBMSへの移行を検討する必要がある。

図表 11 収束率の比較 (4ヶ国)

年	ベルギー	日本	台湾	スイス
0	1.9913	1.9950	2.000	1.9742
10	1.7769	1.1551	0	1.0124
20	0.9120	0.3217	0	0.3541
30	0.4209	0.0529	0	0.1348
60	0.0382	0.0007	0	0.0061

(出典：Jean Lemaire 'Bonus-Malus Systems : The European and Asian Approach to Merit -Rating')

5. 自動車保険等の状況

規制緩和が進み個人情報を取得しやすい米国などでは信頼理論などを活用して各種データにもとづき保険料を予測する手法が広く利用されている。一方、一定の規制や個人情報の利用の取得が容易でないヨーロッパやアジアの国々ではBMSが広く利用されている。社会的な背景を踏まえて、これらの概況について紹介する。

(1) 米国の状況

米国の自動車保険料は規制緩和が進んでおり保険引受けに必要な個人情報の取得と利用できる環境にあることから、信頼性理論などの様々な数理手法を駆使して事前予測に基づく保険料を算出している。

a. 法制度について

米国の保険事業では、各州の保険監督機関による各州の保険法に基づく州別の規制・監督制度が採用されており、米国には連邦レベルの保険監督機関および連邦レベルの保険監督法は存在しない。また、全米保険庁長官会議 (National Association of Insurance Commissioners : NAIC) が、保険業界共通の主要課題に関するモデル法を策定し、NAICモデル法の内容に沿った各州保険法の制定を働きかけている。NAICへの加盟は任意であるが、現在、すべての州保険庁長官が参加しており実質的にNAICモデル法が米国における保険監督法の標準となっている。

⁴⁶ 収束率 $(TV)_n = \sum_{j=1}^s |p_{ij}^n(\lambda) - a_j(\lambda)|$

(a) 料率規制

保険料に関する NAIC モデル法 (Property and Casualty Model Rating Law) によると、保険料は "not be excessive, inadequate or unfairly discriminately", と規定されている。認可形態は州によって異なり図表 12 のとおり様々である。また、このモデル法では、使用を制限するリスク区分は人種、宗教、国籍などに限定されている。従って、保険者は比較的自由にリスク区分を設定できると言われている。

図表 12 料率の認可形態

区分	認可形態
州制定 (State-made rates)	保険庁が保険会社の使用する料率を決定する
事前認可 (Strict prior approval)	保険会社は新料率を使用開始前に保険庁に届出て、認可を受けて使用可能となる
みなし事前認可 (Prior approval with an express deemer)	保険会社は新料率を使用開始前に保険庁に届出て、一定の待機期間中に保険庁が特に非認可を通知しない限り、新料率は自動的に法律要件を満たしたとみなされ使用可能となる
幅認可 (Flex rating)	保険庁が予め定めた範囲内の料率変更は届出後使用、当該範囲を超える料率変更は事前認可が必要になる
届出後使用 (File and use)	保険会社が新料率を使用開始以前または当日に保険庁に届出ることにより使用可能となる (法律で明記されない場合が多いが、黙示的に、発効日が過ぎて保険庁が積極的または否定的な対応をしないときは、自動的に有効とみなされる)
使用后届出 (Use and file)	保険会社は保険庁に届出前に新料率を使用でき、通常は発効日以降一定期間内に届出する
届出のみ (Rate filing only)	保険会社は新料率を保険庁に届出するが、届出時期は発効日の前後いずれでもよく、発効日以降は新料率が自動的に法律要件を満たし使用可能となる
情報届出 (Information filing)	保険会社は保険庁に参考情報として新料率を届出する
届出不要 (No filing)	保険会社は、保険庁に新料率を届出する義務を負わない

(出典：AIA, "2003 State Rate Form Laws"をもとに作成)

(b) 個人情報の保護

米国では保険引受けのための個人情報の開示が進んでおり、相当な情報を保険者は入手することができる。

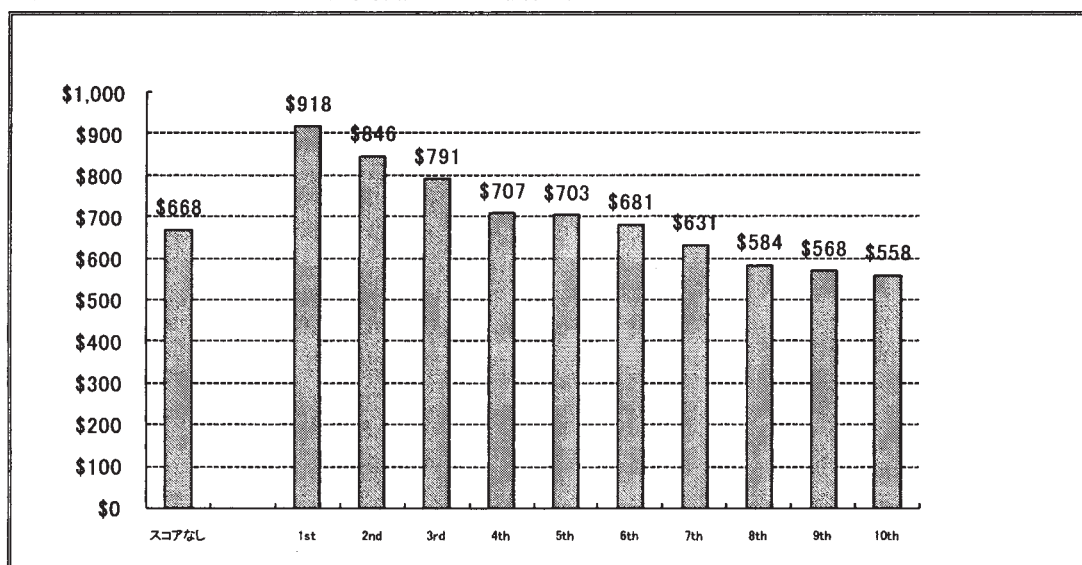
例えば、米国最大手のアドバイザー団体 (Advisory Organization) である ISO (Insurance Services Office, Inc) が提供する自動車・財物アンダーライティングサービス (Automobile-Property Loss Underwriting Service : A-PLUS)⁴⁷は、2億 4,000 万件以上のクレームをデータベースに持っており、過去の事故歴などを保険者にレポートしている。このサービスの利用保険者は保険料ベースで全米の 92% 以上を占める。各種個人情報を保険会社等が入手できる背景には法律により認めら

⁴⁷ 申込者と車両あるいは車両のみの情報から、申込者や車両の過去の事故歴、同一車両にかかる他の者や事業の事故歴をアンダーライターや代理店に報告するシステムである。

れているからである。

また、米国では自動車などの個人保険に引受けにあたりクレジットスコアと呼ばれるクレジットカードの利用状況を中心とする信用度が利用されている。クレジットスコアと自動車保険事故との相関は高く、極めて有効な保険料算出要素として活用されている。この相関性の真偽、クレジットスコアの信頼性、クレジットスコアと人種・収入に相関性が高いので差別であるという指摘などから、クレジットスコアの保険料算出への利用については議論を呼んでいる。保険者は従来から法的には公正信用情報報告法にもとづきクレジットスコアを保険引受のために入手できること⁴⁸、全米保険立法者会議(National Conference of Insurance Legislators:NCOIL)は2002年にクレジット情報に関するモデル法⁴⁹を設定して保険者の遵守すべき厳格なルールを定めて多くの州がこれに準拠していることなどから、一応の落ち着きを見せている。このクレジットスコアの信頼性は図表13と図表14を参照願う。

図表13 クレジットと自動車保険の平均損害額

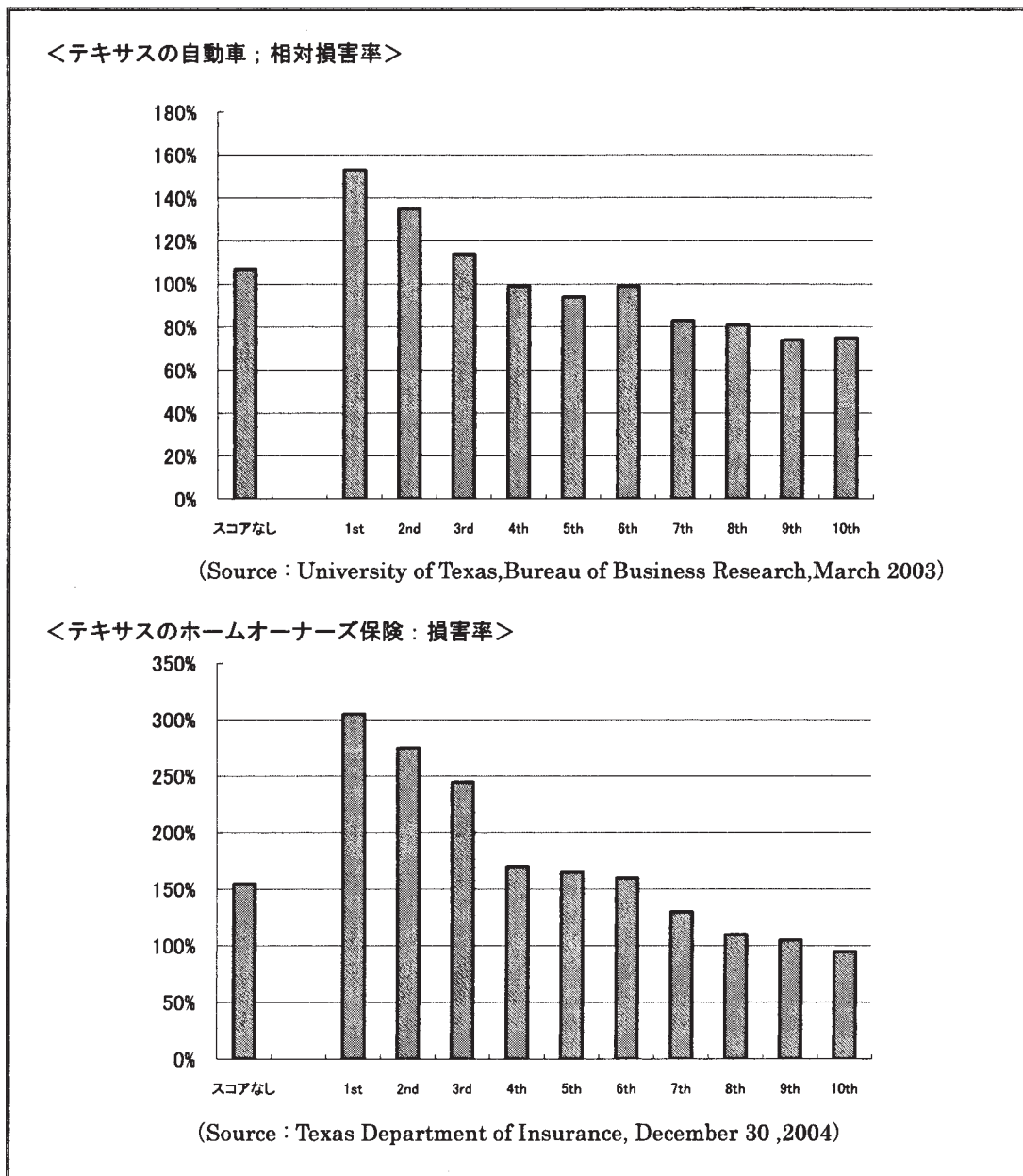


(出典：I.I.I. 'No Evidence of Disparate Impact in Texas Due to Use of Credit Information by Personal Lines Insurers', January 2005, Source: University of Texas, Bureau of Business Research, March 2003)

⁴⁸ 公正信用情報報告法(連邦法)は、情報の流通を認めながら消費者の権利を保護することを目的とする個人信用情報のプライバシー保護に関する法律である。消費者報告機関(Consumer Reporting Agency)が行う信用状況、性格、生活状態などの消費者に係る報告(Consumer Report)を規制対象としている。消費者情報機関は正確な情報を提供しなければならないが、この報告は保険や雇用などの目的で利用される場合には消費者の同意を得る必要ない。

⁴⁹ パーソナル保険におけるクレジット情報に関するモデル法

図表 14 クレジットと損害率の関係



(出典 : I.I.I. 'No Evidence of Disparate Impact in Texas Due to Use of Credit Information by Personal Lines Insurers', January 2005)

b. 具体的な事例

米国で採用されたある年の自動車保険算出スキームの考え方について説明する。

(a) 保険料算出の考え方

$$\text{危険保険料} = (\text{基本保険料}) \times [(\text{第1次料率係数}) + (\text{第2次料率係数})] \times (1 - \text{その他割引率})$$

(b) リスク区分

主な保険料の算出区分は次の図表 15 のとおりである。(87年の資料をもとにしておりクレジットスコアなどは保険料算出要素に含まれていない。)

基本保険料は郵便番号 (Zip Code) あるいは市・町などの地域 (territory) を基準とし、地域ごとに区分して保険料を算出する。事故頻度と保険金単価を予測したうえで保険料を算出するが、この予測にあたり実績データだけではなく、事故頻度や保険金単価の信頼度 (Credibility) を反映させている。

第2次料率係数の運転歴 (Safe Driver Insurance Plan : 以下「SDIP」) については、過去3年間の法令違反、事故歴をポイント化 (SDIP ポイント) し、このポイントに対応する車の性能や車の台数によって決まる割増引が適用される。

図表 15 保険料算出区分

	保険料算出区分
基本保険料	① 地域 ② 限度額 (賠償保険のみ) ③ 車両等級 (車両保険のみ) ④ 年式 (車両保険のみ) ⑤ 免責金額 (車両保険のみ)
第1次料率係数	① 年齢 ② 性別 ③ 婚姻状況 ④ 車の用途 (業務用、農業用、行楽用、通勤・通学用など) ⑤ 若年運転者の訓練 ⑥ 年間走行距離
第2次料率係数	① 車の性能 (標準性能、スポーツ車など) ② 車の台数 ③ 運転歴 (違反歴、事故歴)
その他割引率	① 盗難防止装置 ② 自動装着束縛装置 (シートベルトなど)

(出典：1987年3月 自動車保険賠償責任保険料制度 海外調査報告 第2編アメリカ：自動車
保険料率算定会 料率部をもとに作成)

(2) ヨーロッパの状況

a. 法制度について

ヨーロッパは強い規制のもとで保険制度が運営されていたが、EU 指令を契機に緩和が進んできた。

(a) EU 指令と各国の料率規制

ヨーロッパで法規制が厳格でありタリフ料率など保険者が自由に保険料水準を決定することは困難であったが、このため BMS が活用され、ベルギーや北欧を中心に制度も分析・研究されてきた。ところが、1994年7月の EC 損害保険第3次指

令(92/49/EEC)⁵⁰によって、保険料の事前認可や制度的な届出を採用することが禁止された。これにより、保険者は保険料決定の仕組みを改善し、保険料クラスを一層細分化でき革新的なBMSも導入できることとなった。EC(European Commission)は強制的に使用するBMSは競争原理を破るものであるという明確なメッセージを出している。

これを受けて、イタリアやポルトガルは早期に革新的なBMSを導入した。ポルトガルの従来のBMSは6クラスを有していたが、2001年には33種類以上の異なるBMSが導入され、BMSのクラスは12から28クラスと細分化、最高割引率も高くなり30%から60%の間に設定されている。

しかしながら、BMSを積極的に改善しない国々もヨーロッパにはあった。ベルギー、フランス、ルクセンブルグの保険会社の協会は、全ての保険会社の画一的なBMS採用をEC指令の適用除外とすることを目的とする法的手段にでた。そして、予想外に、フランスとベルギーは法的承認を得た⁵¹。ベルギーでは円滑な移行が図られ、BMSの設計が自由化されたのは2004年1月からである。

(b) 料率区分

ヨーロッパでは、日本と同様に保険料はリスク区分されており、かつBMSも導入されている。

例えば、イギリスは、地域、免許取得年数、事故歴、違反歴、夜間駐車場所、走行距離、使用用途によって保険料率を区分し、30%~60%の無事故割引を適用される。フランスは自由料率であり、車種、カテゴリー、地域、事故歴、運転歴、走行距離、使用用途ごとに保険料率を区分し、50%~350%の割増引が適用される。ドイツは、車種、年齢、駐車場、登録地、職業、運転者、安全装置、盗難防止装置、走行距離、使用用途ごとに保険料率を区分される。

また、ヨーロッパでは、EUの男女均等待遇原則指令(2004/113/EC)によって、原則として、男女に異なる保険料を適用することが禁止されている。(5条1項)

(c) 個人情報の保護

EUでは、1995年10月24日に個人データ保護指令を採択しており、個人データの利用には、原則として本人の同意が必要とされている。したがって、個人の同意がなければ、保険会社が個人の事故歴やクレジット情報を業務目的のために入手することは難しい。

⁵⁰ Chapter3 Articles29

⁵¹ 欧州裁判所は、2004年9月7日、フランスおよびルクセンブルグ政府がBMSを法定化していることについて適法であるとの判断を下している。法定BMSは保険料の額に影響を及ぼすものの、保険会社は基本保険料を自由に設定できるので、国による直接的な保険料設定に当たらず、保険料率自由の原則に反しないとしたものである。

b. ヨーロッパでの適用状況

ヨーロッパでは伝統的に BMS が活用されてきた。これの原因は、EC 損害保険第 3 次指令以前は一般に規制が強く保険会社が保険料率を自由に算出できなかったこと、さらに、規制が緩和されても保険料率算出に必要なとなる個人情報入手の制度等が十分でないこと、男女均等待遇のように法令で保険料算出に使用できない情報があることなどが考えられる。

6. 実務における検討

本節では、過去のデータにもとづき将来の保険料を予測する方法と、BMS のような制度を比較する。

(1) 活用可能情報

保険者が被保険者の情報をすべて知り、この情報に基づき保険料を決定できたならば効率的な保険料を適用できるであろう。然しながら、様々な制約がある。

a. 情報の非対象性

保険者と被保険者には同様なレベルの情報を持っているわけではない。一般には、被保険者が多くの情報を持っているが、総合的な情報や情報の分析力では保険会社が勝る。これらは次のとおり、ケースによって異なる。

- ① 保険者が保険料算出に必要な情報を全て入手できる場合には、公平な保険料算出が行える。
- ② 被保険者が保険料の算出に重要な情報を持っているが保険者が認識していない場合には、逆選択が起こる。例えば、飲酒運転の常習者であることを知らずに、保険者が保険を引き受けた場合などである。
- ③ 被保険者が知らないが保険者が何らかの手段情報を入手できた場合には、保険者は、悪いリスクに対しては相応の保険料を提示できるし、良いリスクに対しては過小でない保険料を提示できる。

b. 保険料算出要素

保険料は過去のデータをもとに保険料を推定する場合には、保険料算出要素の細かさが問題となる。保険料に影響を与えるようなリスク特性の異なるものは保険料算出要素に加えるべきであるが、いくつかの考慮すべき課題がある。

第 1 に、過度に保険料算出要素を細分化しすぎると十分なデータ量を手に入できず統計処理が難しくなる場合である。

第2は、規制や技術的な障害等によってデータが入手できず、保険料率算出ための要素として利用できない場合である。

c. データ取得の課題

上記 b. 保険料算出要素であげたデータ取得の問題については、①技術的には可能であるが規制によって利用が禁止されているもの、②規制はないが技術的に取得できないデータに分けられる。

ユーロッパにおける男女均等待遇、日本の地域別料率の制限などを始めとして、規制により利用が制限されているデータについては、その社会に依存するため、所与のものとして受け入れざるを得ない。規制はないが技術的に入手できない情報については、技術改善によって将来的には保険料に反映する必要がある。

(2) 情報から予測・決定

a. 将来の保険料を予測する方法

過去のデータから将来の支払保険金を予測しこの予測をもとに保険料を決定する事前予測手法は、保険者と被保険者の情報の非対称性も問題と保険者の判断結果を保険料にストレートに反映できるかどうかが課題となる。自動車保険の場合の事故歴、医療保険の場合の病歴や遺伝子情報などの情報を被保険者のみ知り保険者が知らない場合は逆選択の問題や保険料の過小といった事態が懸念される。また、社会規範上、男女の平等を貫くため性による保険料の差異を認めないヨーロッパでは、保険者が必要と考える水準の保険料を設定できないこともある。

事前予測手法が有効に機能するためには、①保険引受のための個人データ等の取得が合法であること、②技術的に必要十分な個人の過去データ等を入手できること、③このデータにもとづく予測結果を保険料に反映することが許容されていることの3条件をみたす必要がある。

米国のように、この3条件が相当程度満たされる社会においては、予測手法はかなり機能すると考える。しかしながら、ヨーロッパやアジアのように、条件が整備されていない場合には、予測手法だけでは適正な保険料を算出し、実際に適用することは難しい。

過去のデータから将来の保険料を予測する方法として、第3節では Bayse 理論や信頼性理論が活用されてきた。第2節で説明したとおり、近年、ファイナンスの理論と保険理論の融合がみられる。ファイナンスで発達し保険でも整備されてきた測度変換などの理論を、実務で活用する道を探りたい。

b. 割増引制度（BMS）

前記の3条件が整わない場合には、将来の保険金を予測し予めこれに見合った保険料率を設定することが難しい。極端な例として、規制で均一料率しか認められていない場合には、BMSは唯一の保険料是正手段である。保険料評価に過去の事故歴が認められない場合にも、BMSは唯一の運転者等の事故歴を反映する手段である。保険料に男女の差異を設けられない場合でも、この差異をBMSは長期的には保険料率に反映できる。

保険者は入手可能な範囲で、高過ぎず、安過ぎず、不当に差別的でない保険料を算出することが保険者の使命である。しかしながら、保険料算出に必要な情報を入手、活用できない場合もあるので、より適正な保険料を算出するためには、BMSによって補完することが望ましいと考える。しかしながら、BMSには、次のような課題もある。

- 過度にBMSを意識したボーナス・ハンガー（bonus hunger）という問題もある。事故を起こしても、将来の保険料上昇を防ぐため保険金を請求しない行動パターンである。BMSでは事故回数のみをカウントし支払保険金の額は割増引に影響を与えない。少額事故と大規模事故と取り扱いが同じであるため、保険金請求額が少額の場合には、契約者にとって利益がある。さらに保険契約者はいつでも（事故を起こして保険料が上がるとき）保険を解約できるという指摘もある。この場合に、次のような問題が起こる。
 - ・ 逸失割引（ボーナス）による損失額が支払保険金の額を超えてしまう。
 - ・ 事故を起こした契約者は割増を避けるためにその保険会社との契約をやめることができる
 - ・ これらのボーナス・ハンガーの行動によって、実態より平均割引率が高くなる。
- 保険料の予測に過去の運転歴や事故歴を使用したうえで、BMSを適用できるか否かという問題である。この場合には、事故歴が保険料にダブルで反映する恐れがある。

(3) 今後の課題

適正な保険料算定のために、前記3条件を満たすことを目標に、情報入手や分析の技術や社会制度などを整備するよう働きかけることが今後の課題といえる。

また、入手した情報の活用方法についても、一層の数理理論の研究開発とその実務への応用を期待する。例えば、実際の過去のデータをもとに予測する経験積率母関数

による Esscher 変換が検討されている⁵²。これを機会に測度変換による実務的な予測手法を確立する可能性が期待できる。

ボーナス・ハンガーに対応する方策として、Holtan によって、高免責制度 (High Deductive System : 以下「HDS」) が提唱されている。この HDS は高額 of 免責金額を設定する一方で、免責金額内で契約者が自己負担分に対しては保険会社が優遇ローンを提供する制度である。3,000ドル位の高額の免責金額を設定することにより、少額の保険金請求による割増の適用を防ぐことができ、割増の進行のために保険金を請求しないボーナス・ハンガーを防止できる。保険会社が提供する優遇ローンにより契約者の一時的な出費は回避でき、契約者は一定期間かけてローンを返済するので一時的な負担は減少する⁵³。

過去の事故歴等を保険料予測と BMS に併用するこの是非については、制度次第であると考えられる。極端な例をあげると、過去の事故回数の履歴のみを用いて保険料率を決めている BMS の複製である保険料予測手法を用いているのであれば、BMS と完全に重複するので併用できないと考える。しかしながら、一般の保険料予測手法では、運転者の特性を知る情報の一つとして過去数年程度の事故歴を入手している場合、過去の事故歴が BMS のように割増引によって保険料率全体に影響を与えるのではなく、保険料率の構成要素の一部に影響を与える場合もある。

規制や技術的な理由のため保険料率算出要素として採用できない情報があっても、長期的にはこれらの要素は事故歴として顕在化してくる。このような要素がある場合には、保険料予測に契約者の事故歴を含めていても BMS を併用する価値は残ると考える。BMS には割増引制度を明示化することで、安全運転を促進する副次的な効果もある。なお、将来予測と BMS の併用にあつたては、それぞれの制度が重複しないような整合性のある制度設計を行う必要がある。

7. おわりに

本レポートでは、保険料算出のための基本的な考え方を理論面、実務面から論じてきた。損害保険は人間の活動にかかわる多様なリスクを引き受けており、リスクの特性によって適用すべき理論も異なる。自動車保険のように頻繁に事故が発生し被保険者毎にリスク度合いが大きく異なるもの、住宅家計火災保険のように事故頻度は極めて低く被保険者の特性がリスクに影響を与えないもの、地震や台風などの巨大自然災害のように、頻度は低いが損害額が極めて大きいものなど、それぞれのリスクに適用した理論がある

⁵² 詳しくは参考 3.C を参照願う。

⁵³ Holtan(1994)などを参照願う。

べきである。

多様なリスクを保険するためには、広く深い理論の研究がなされ、実践的な理論に発展し、実務への応用を通じて理論と実務のシナジー効果が生まれることが望ましい。保険数理の進歩を通じて、損害保険業界がますます信頼を得て、発展することを祈念する。

参考 1. 密度関数・平均・分散等

代表的な密度関数である二項分布、正規分布、ポワソン分布、負の二項分布、および積率母関数について説明する。

A. 二項分布

2 項分布の平均は np となる。

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k$$

$$\frac{d(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k)}{dx} = \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^{k-1} \quad \text{であり平均となる}$$

$$\frac{d(px+q)^n}{dx} = np(px+q)^{n-1}$$

$x=1$ を代入すると、

$$=np$$

また、2 項分布の分散は npq である。

$$\frac{d^2(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k)}{dx^2} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \times \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^{k-2} = E(r^2) - E(r) = E(r^2) - np$$

$$\frac{d^2(px+q)^n}{dx^2} = n(n-1)p^2(px+q)^{n-2}$$

$x=1$ を代入すると、

$$=n(n-1)p^2$$

$$E(r^2) - [E(r)]^2 = [n(n-1)p^2 + np] - (np)^2 \\ = np(1-p) = npq$$

B. 正規分布

n を無限回行う。この場合、 k も $n-k$ も無限回になる場合について考える。

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Stirling の公式 $n! \doteq \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} \exp(-n)$ により、

参考 1. 密度関数・平均・分散等

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= \left(\frac{n}{2\pi k(n-k)} \right)^{1/2} \left(\frac{np}{k} \right)^k \left(\frac{nq}{n-k} \right)^{n-k}$$

$k = np + x$ 、 $n-k = nq - x$ とする。

$$= \left(\frac{n}{2\pi(np+x)(np+x)} \right)^{1/2} \left(\frac{np}{np+x} \right)^{np+x} \left(\frac{nq}{nq-x} \right)^{nq-x}$$

$$= \left(\frac{n}{2\pi(np+x)(np+x)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{np}\right)^{np+x} \left(1-\frac{x}{nq}\right)^{nq-x}}$$

$$\log \left(1 + \frac{x}{np}\right)^{np+x} \left(1 - \frac{x}{nq}\right)^{nq-x} +$$

$$= (np+x) \log \left(1 + \frac{x}{np}\right) + (nq-x) \log \left(1 - \frac{x}{nq}\right)$$

$$= (np+x) \left[\left(\frac{x}{np}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{np}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{np}\right)^3 \dots \right]$$

$$- (nq-x) \left[\left(\frac{x}{nq}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{nq}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{nq}\right)^3 \dots \right]$$

$$= \frac{x^2}{2n} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - \frac{x^3}{6n^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \dots$$

$$\frac{x^2}{2n} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{x^2}{2npq} \text{ で } n \text{ を無限大にした場合に } n \text{ 項以下はゼロに収束する。}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x^2}{2npq}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)$$

参考 1. 密度関数・平均・分散等

$np = \mu$ 、 $npq = \sigma$ とする。

正規分布 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma}\right)$ となる。

二項分布と同様に、平均 $\mu = np$ 、分散 $\sigma = npq$ である。これは、正規分布をから直接求めることもできる。

C. ポワソン分布

二項分布において、実現確率 p が小さく、試行回数 n が非常に大きく、 $np = \lambda$ が一定の場合次のようになる。

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \lambda^k q^{n-k}}{k!} \\ &= \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \left[\frac{\lambda^k}{k!}\right] \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\right] \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right]\end{aligned}$$

N を無限大にすると、第 1 項と第 3 項は 1 に収束する。第 3 項は定義より $\exp(-\lambda)$ に収束する。従って、次のとおりとなる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$$

ポワソン分布の平均は λ 分散は λ である。

D. 負の二項分布

k 回失敗したうえで、 r 回目の成功を得られる事象の確率密度の分布を負の二項分布という。

$$\begin{aligned}\binom{r+k-1}{k} p^{r-1} q^k \cdot p &= \binom{r+k-1}{k} p^r q^k \\ &= \binom{-r}{k} p^r (-q)^k\end{aligned}$$

負の二項分布の平均は kq/p 、分散は kq/p^2 である

参考 1. 密度関数・平均・分散等

E. 積率母関数

積率母関数を次のとおり定義する。

$$\begin{aligned} M_x(h) &= E[\exp(hx)] \\ &= 1 + E(x)h + \left[\frac{E(x^2)h^2}{2!} \right] + \left[\frac{E(x^3)h^3}{3!} \right] + \cdots + \left[\frac{E(x^n)h^n}{n!} \right] \end{aligned}$$

例えば、 x が正規分布のときに積率母関数 $M_x(h) = \exp(\mu h + \sigma^2 \frac{h^2}{2})$ 、である。

積率母関数には次の性質がある。

$$\frac{d^n M_x(0)}{dh^n} = E(x^n)$$

この性質を利用すると、次のとおり平均と分散が求められる。

$$\text{平均 } \mu = \frac{d M_x(0)}{dh}$$

$$\text{分散 } \sigma = \left[\frac{d M_x(0)}{dh} \right]^2 - \frac{d^2 M_x(0)}{dh^2}$$

参考2. デリバティブの価格 (Black-Scholes)

A. 偏微分方程式により Black-Scholes を求める。

時刻 t の株式の価格を S_t とし、Brown 運動 B_t に従うと仮定する。行使価格は K 。

Brown 運動とは次の条件を満たす、瞬間的な推移が正規分布となる確率過程である。

- (1) ほとんど確実に、 $B_t = 0$
- (2) $B_s - B_t$ は、 $N(0, s-t)$ の正規分布に従う、 $s > t$
- (3) 任意の n, m に対して、 $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ と $B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ は独立
- (4) サンプルパス $B(\omega, t)$ は連続

伊藤過程 (Ito Process)

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad t \geq 0$$

微分形式で記述すると、 $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$, $S_0 = x$

伊藤の補題 (Ito's Lemma)

伊藤過程 $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ に対して、 $Y_t = f(X_t, t)$ によって定まる過程も伊藤過程となり、次の関係を満たす。

$$dY_t = [f_x(X_t, t)\mu_t + f_t(X_t, t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X_t, t)\sigma_t^2] dt + f_x(X_t, t)\sigma_t dB_t$$

自己ファイナンス (Self Finance)

債権 (bond) の価格過程を $\beta_t = \beta_0 \exp(rt)$, $t \geq 0$ 、伊藤過程とみると、 $d\beta_t = \beta_t r dt$ となる。

株式 (stock) の伊藤過程を $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$

$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t a_\tau dS_\tau + \int_0^t b_\tau d\beta_\tau$$

Black-Scholes 公式 $C(x, t)$ を求める。

$Y_t = C(S_t, t)$, $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$ とし、伊藤の補題から、

$$dY_t = [C_x(S_t, t)\mu S_t + C_t(S_t, t) + \frac{1}{2}C_{xx}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2] dt + C_x(S_t, t)\sigma S_t dB_t$$

自己ファイナンス $Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t$ とする。

$$dY_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t = (a_t \mu S_t + b_t \beta_t r) dt + a_t \sigma S_t dB_t, \quad r_f \text{ は無リスクの債権利回り}$$

$$a_t = C_x(S_t, t) \text{ となるように } a_t \text{ を選ぶ。すると、} b_t = \frac{1}{\beta_t} [C(S_t, t) - C_x(S_t, t) S_t]$$

これらより偏微分方程式 $C_t(S_t, t) + C_x(S_t, t)r_f S_t + \frac{1}{2}C_{xx}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2 = r_f C(S_t, t)$ が導かれる

期間 T 後に、行使価格 K とする、

上記偏微分方程式の境界条件は $Y_T = C(S_T, T) = (S_T - K)^+$ となる。

これは、熱電伝導方程式の初期値問題となり、解は次のとおりである。

$$C(x, t) = x N(d_+(T, x)) - K \exp(-rT) N(d_-(T, x))$$

$$\text{ただし、} d_{\pm}(T, x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \right) [\log(x/k) + (r \pm \sigma^2)T]$$

参考 2. デリバティブの価格 (Black-Scholes)

B. 測度変換により Black-Scholes を求める。

この理論は、その後、Harrison、Kreps、Pliska によって測度変換にて整理された。リスク中立の確率測度を用いて次のとおり整理されることになった。

次の定理により測度変換し、与えられた伊藤過程をほとんど任意に与えられたドリフトを持つ伊藤過程に変更できる。

Cameron-Martin-Girsanov-丸山の系

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

$\sigma_t \theta_t = \mu_t - \gamma_t$ を満たす θ が存在すると、 X も伊藤過程で

$$X_t = x + \int_0^t \gamma_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s^Q \quad \text{と書ける。}$$

拡散不変原理

伊藤過程 $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ が同値な確率測度 Q に対して Martingale であれば、 Q のもとで、 $dX_t = \sigma_t dB_t^Q$ となる Brown 運動 B_t^Q が存在する。

株式 (stock) の伊藤過程を $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$

債権 (bond) の伊藤過程を $d\beta_t = \beta_t r_f dt$

$Z_t = S_t/\beta_t$ とすると、伊藤の補題より次のとおりとなる。

$$dZ_t = Z_t [(\mu - r_f)dt + \sigma dB_t]$$

Cameron-Martin-Girsanov-丸山の定理により、同値 Martingale 測度 Q が存在して、

$$dZ_t = Z_t \sigma dB_t^Q, \quad \text{ただし } B_t^Q \text{ は測度 } Q \text{ のもとでの Brown 運動}$$

行使価格 K のオプション価格過程を S_t^2 とすると、 $S_t^2 = [(S_t - K)^+]$

測度 Q のもとで、 S_t^2/β_t は Martingale となるから、

$$S_t^2 = \beta_t E^Q (S_T^2/\beta_T) = \exp(-rt) E^Q [\exp(-rT)(S_T - K)^+] = \exp[-r(T-t)] E^Q [(S_t - K)^+]$$

Martingale 測度 Q のもとで、この期待値を求めると Black-Scholes 式が求められる。

参考3. 測度変換

A. Esscher 変換の性質

積率母関数 $M_x(h) = E[\exp(hx)]$ が存在すれば、 $M'_x(h) = \frac{dM_x(h)}{dh} = E[x \exp(hx)]$
 従って、Esscher 変換は次のとおり記述できる。

$$\frac{M'_x(h)}{M_x(h)} = \frac{d[\log_e M_x(h)]}{dh}$$

X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ を Esscher 変換すると正規分布 $N(\mu + h\sigma^2, \sigma^2)$ になる。

$$\log_e M_x(h) = \mu h + \sigma^2 \frac{h^2}{2}$$

従って、 $\text{Prem} = \log_e M_x(h)' = \mu + \sigma^2 h = E[x] + h \text{Var}[x]$

共分散は次のとおりとなる。

$$\text{Cov}[x, \exp(hx)] = E\{[x - E(x)][\exp(hx) - E(\exp(hx))]\}$$

$$= E[x \exp(hx)] - E[x]E[\exp(hx)] \quad \text{であるから。}$$

$$\frac{E[x \exp(hx)]}{E[\exp(hx)]} = E(x) + \frac{\text{Cov}[x, \exp(hx)]}{E[\exp(hx)]}$$

B. Esscher 変換による測度変換で Black-Scholes を求める。

$$\begin{aligned} S_0 &= \exp(-r_f T) E\left[S_T(x_T) \frac{\exp(hx_T)}{E[\exp(hx_T)]}\right] \\ &= \exp(-r_f T) E\left\{[S_0 \exp(x_T)] \frac{\exp(hx_T)}{E[\exp(hx_T)]}\right\} \\ &= \exp(-r_f T) E\left\{S_0 \frac{\exp[(h+1)x_T]}{E[\exp(hx_T)]}\right\} \end{aligned}$$

$$\exp(r_f T) = \frac{M_x(1+h^*, T)}{M_x(h^*, T)}$$

$$r_f = \frac{1}{T} \log_e \frac{M_x(1+h^*, T)}{M_x(h^*, T)}$$

参考 3. 測度変換

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \log_e \frac{\exp \left[(1+h^*) \mu T + \frac{(1+h^*)^2 \sigma^2 T}{2} \right]}{\exp \left[h^* \mu T + \frac{h^{*2} \sigma^2 T}{2} \right]} \\
 &= \frac{1}{T} \log_e \left\{ \exp \left[\left(\Phi \left[\frac{-\kappa + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \right) T + h^* \sigma^2 T \right] \right\} \\
 &= (\mu + h^* \sigma^2) + \frac{\sigma^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu^* &= \mu + h^* \sigma^2 \\
 &= r_f - \frac{\sigma^2}{2}
 \end{aligned}$$

正規分布 $N(\mu t, \sigma^2 t)$ 、標準正規分布を Φ とすると、
 ヨーロピアン・コール・オプションの価格は

$$\begin{aligned}
 &S_0 [1 - N(\mu^* + \sigma^2) T, \sigma^2 T] - \exp(-r_f T) K [1 - N(\mu^* T, \sigma^2 T)] \\
 &= S_0 [1 - N\left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2 T] - \exp(-r_f T) K \left\{ 1 - N\left[\left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2 T\right] \right\} \\
 &= S_0 \Phi \left[\frac{-\kappa + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right] - \exp(-r_f T) K \Phi \left[\frac{-\kappa + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right]
 \end{aligned}$$

ただし、 $\kappa = \log_e [k/S_0]$

C. 経験積率母関数による Esscher 変換

経験積率母関数による Esscher 変換については、森平 (2007) にそって説明する。

$$\begin{aligned}
 \text{Prem} &= E^Q[x] \\
 &= E^P \left[x \left(\frac{\exp(hx)}{E^P[\exp(hx)]} \right) \right] \\
 &= \int_0^\infty x \left(\frac{\exp(hx)}{E^P[\exp(hx)]} \right) f^P(x) dx \\
 &= \int_0^\infty x f^Q(x) dx
 \end{aligned}$$

参考 3. 測度変換

このとき、測度変換は $\left(\frac{\exp(hx)}{E^P[\exp(hx)]}\right) f^P = f^Q(x)$ である。

積率母関数 $M^P = E^P[\exp(hx)]$ 、キミュラント母関数 $K^P(h) = \log_e M^P(h)$

$$\begin{aligned} \text{Prem} &= \frac{\int_0^\infty x \exp(hx) f^P(x) dx}{E^P[\exp(hx)]} = \frac{E^P[x \exp(hx)]}{M^P} = \left(\frac{1}{M^P}\right) \left(\frac{d M^P(h)}{dh}\right) \\ &= \left(\frac{d \log_e M^P(h)}{dh}\right) \\ &= \frac{d K^P(h)}{dh} \end{aligned}$$

将来損失の分布を想定し、キミュラント母関数を求め、変数 h で微分すれば価格を算出できる。

将来の損失を特定しなければならないが、損失に対して積率母関数が存在しない場合などがある。特定の将来損失と積率母関数を想定することなしに、Esscher 変換を用いて適切な理論価格を求める方法として次の2つが考えられる。

方法 1 : 経験 Esscher 変換

$$\text{Prem} = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{\exp(hx_i)}{\sum_{i=1}^n \exp(hx_i)/n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp(hx_i)}{\sum_{i=1}^n \exp(hx_i)}$$

方法 2 : 経験キミュラント変換

$$M_n^P = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \exp(hx_i)$$

$$K_n^P = \log_e M_n^P = \log_e \left[\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \exp(hx_i)\right]$$

Feuerverger の定理によると、標本数が大きくなると経験積率母関数や経験キミュラント母関数は、積率母関数やキミュラント母関数に一致することがほぼ確実である。

参考 3. 測度変換

D. Wang 変換

Wang 変換の主な性質について説明する。

Wang 変換を測度変換として記述すると密度関数は次のとおり変換される。

$$f^Q(x) = \frac{\phi(\xi-\lambda)}{\phi(\xi)} f^P(x), \quad \text{ただし, } \xi = \Phi^{-1}(F^P(x))$$

証明は次のとおり。

$F^Q(x) = \Phi[\Phi^{-1}F^P(x) - \lambda]$ の両辺を微分する。

$$\frac{dF^Q(x)}{dx} = f^Q(x)$$

$$\frac{d\Phi[\Phi^{-1}F^P(x) - \lambda]}{dx} = \frac{d\Phi[\Phi^{-1}F^P(x) - \lambda]}{d[\Phi^{-1}F^P(x)]} \frac{d[\Phi^{-1}F^P(x)]}{dF^P(x)} \frac{dF^P(x)}{dx}$$

$$= \phi(\xi - \lambda) \frac{1}{\phi(\xi)} \phi(\xi)$$

Wang 変換は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ を $N(\mu + \lambda\sigma, \sigma^2)$ に変換する。

なぜなら、 $N(\mu, \sigma^2)$ の場合 $F^P(x) = \Phi[(x - \mu)/\sigma]$ となる。

Wang 変換の定義から、

$$\begin{aligned} F^Q(x) &= \Phi[\Phi^{-1}F^P(x) - \lambda] \\ &= \Phi[(x - \mu)/\sigma - \lambda] \\ &= \Phi[(x - (\mu + \lambda\sigma))/\sigma] \end{aligned}$$

Wang 変換は対数正規分布 ($\log x \sim N(\mu, \sigma^2)$) を ($\log x \sim N(\mu + \lambda\sigma, \sigma^2)$) に変換する。

なぜなら、 $N(\mu, \sigma^2)$ の場合 $F^P(x) = \Phi[(\log x - \mu)/\sigma]$ となる。

Wang 変換の定義から、

$$\begin{aligned} F^Q(x) &= \Phi[\Phi^{-1}F^P(x) - \lambda] \\ &= \Phi[(\log x - \mu)/\sigma - \lambda] \\ &= \Phi[(\log x - (\mu + \lambda\sigma))/\sigma] \end{aligned}$$

Radon-Nikodym 微分 $\frac{\phi(\xi-\lambda)}{\phi(\xi)} = \exp(\lambda\xi - \lambda^2/2)$
 $= \exp[\lambda(x - \mu)/\sigma - \lambda^2/2]$

$\kappa = \lambda/\sigma$ とする。

$$\begin{aligned} &= \exp[(\kappa x) - (\kappa\mu + (\kappa\sigma)^2/2)] \\ &= \exp(\kappa x) / E[\exp(\kappa x)] \end{aligned}$$

従って、正規分布の場合には Wang 変換は Esscher 変換に一致する。

すると Esscher 変換と同様に

$$\text{Prem} = E[x] + \kappa \text{Var}[x] = E[x] + \lambda \sqrt{\text{Var}(x)} = E[x] + \lambda\sigma$$

参考 4. Bayes 理論

A. Bayes 理論による予測

$$E(x_{n+1}|X=x) = \int x_{n+1} f(x_{n+1}|x) dx_{n+1} \quad \text{式 A}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} f(x_{n+1}|x) &= (1/f(x)) \int [\prod_{i=1}^{i=n+1} f(x_i|\theta)\pi(\theta)]d\theta \\ f(x) &= \int [\prod_{i=1}^{i=n} f(x_i|\theta)\pi(\theta)]d\theta \\ f(x, \theta) &= f(x_1, \dots, x_n|\theta)\pi(\theta) = \prod_{i=1}^{i=n} f(x_i|\theta)\pi(\theta) \\ &= \pi(\theta|x) f(x) \\ \pi(\theta|x) &= [1/f(x)] [\prod_{i=1}^{i=n} f(x_i|\theta)]\pi(\theta) \end{aligned}$$

ただし、X は x_1 から x_n までの事象を表す。

B. 事後確率 (式 A の変形)

上記の式 A の変形として、次の算式により $f(x_2|x_1)$ を求める方法を紹介する。

基本的考え方は、

$$f(x_{n+1}|x) = \int [f(x_{n+1}|\theta)\pi(\theta|x)]d\theta \quad \text{である。式 A'}$$

この $\pi(\theta|x)$ は、Bayes の定理より、 $\pi(\theta|x) = (1/f(x)) [\prod_{i=1}^{i=n} f(x_i|\theta)]\pi(\theta)$

具体的には、 $\pi(\theta_{ij}|x_1) = f(x_1|\theta_{ij})\pi(\theta_{ij}) / f(x_1)$

条件付確率 $\pi(\theta|x_1) = f(x_1|\theta)\pi(\theta)/f(x_1)$ となることから、 x_1 が無事故で保険金ゼロ、保険金 2 万円、保険金 10 万円の場合の 4 事象の $\pi(\theta|x_1)$ は次の計算結果の表 5 のとおりとなる。

計算結果の表 5

	$\theta = \theta_{11}$	$\theta = \theta_{12}$	$\theta = \theta_{21}$	$\theta = \theta_{22}$
$\pi(\theta_{ij} x_1 = 0)$ Pr($\theta = \theta_{ij} x_1 = 0$)	5/18 =(5/6)(1/4)/(3/4)	5/18 =(5/6)(1/4)/(3/4)	2/9 =(4/6)(1/4)/(3/4)	2/9 =(8/36)(1/4)/(3/4)
$\pi(\theta_{ij} x_1 = 2)$ Pr($\theta = \theta_{ij} x_1 = 2$)	5/27 =(5/36)(1/4)/(3/16)	4/27 =(4/36)(1/4)/(3/16)	10/27 =(10/36)(1/4)/(3/16)	8/27 =(8/36)(1/4)/(3/16)
$\pi(\theta_{ij} x_1 = 10)$ Pr($\theta = \theta_{ij} x_1 = 10$)	1/9 =(1/36)(1/4)/(1/16)	2/9 =(2/36)(1/4)/(1/16)	2/9 =(2/36)(1/4)/(1/16)	4/9 =(4/36)(1/4)/(1/16)

$$\begin{aligned} f(x_2|x_1) &= \sum_{i=1, j=1}^{2,2} f(x_2|\theta_{ij})\pi(\theta_{ij}|x_1) \\ &= \sum_{i=1, j=1}^{2,2} \text{Pr}(X = x_2|\theta = \theta_{ij}) \times \text{Pr}(\theta = \theta_{ij}|X = x_1) \end{aligned}$$

より $f(x_2|x_1)$ が求められる。

参考 4. Bayes 理論

C. 事後確率 (式 B)

式 A を計算しやすく記述すると次の式 B のとおりとなる。

$$E(x_{n+1}|X=x) = \int \mu_{n+1}(\theta)\pi(\theta|x)dx \quad \text{式 B}$$

ただし、 $\mu_{n+1}(\theta) = E(x_{n+1}|\theta) = \int x_{n+1}f(x_{n+1}|\theta)dx_{n+1}$

$$\mu_{n+1} = E(x_{n+1}) = E[E(x_{n+1}|\theta)] = E[\mu_{n+1}(\theta)]$$

これによって、期待値を求める。算式を本題に則して算出すると次のとおりになる。

$$\begin{aligned} E(x_2|x_1) &= \sum_{i=1, j=1}^{2,2} x_2 f(x_2|\theta_{ij})\pi(\theta_{ij}|x_1) \\ &= \sum_{i=1, j=1}^{2,2} E(x_2|\theta_{ij})\pi(\theta_{ij}|x_1) \\ &= \sum_{i=1, j=1}^{2,2} \mu_2(\theta_{ij})\pi(\theta_{ij}|x_1) \end{aligned}$$

$\mu_2(\theta_{ij})$ は本文 3.(1)c.の計算結果の表 1 より、 $\pi(\theta_{ij}|x_1)$ は上記の計算結果の表 5 より求められる。

$$E(x_2|0) = (20/36)(5/18) + (28/36)(5/18) + (40/36)(2/9) + (56/36)(2/9) = 26/27$$

$$E(x_2|2) = (20/36)(5/27) + (28/36)(4/27) + (40/36)(10/27) + (56/36)(8/27) = 1 + (22/243)$$

$$E(x_2|10) = (20/36)(1/9) + (28/36)(2/9) + (40/36)(2/9) + (56/36)(4/9) = 1 + (14/81)$$

これらの結果は式 A による予測と一致する。

参考 5. 信頼性理論

A. 最適化

$$E = E \left[\left(\mu_{n+1}(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right)^2 \right] \text{を最小にする } \alpha_0, \alpha_1, \alpha_j, \alpha_n \text{を求める。}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_0} = E[2(-1)(\mu_{n+1}(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j)] = 0$$

$$E[\mu_{n+1}(\Theta)] = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j E(x_j)$$

$$E(\mu_{n+1}|\Theta) = E[E(x_{n+1}|\Theta)] = E(x_{n+1})$$

$$E(x_{n+1}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j E(x_j) \quad \text{式(1)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = E[2(-x_i)(\mu_{n+1}(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j)] = 0$$

$$E[\mu_{n+1}(\Theta)x_i] = \alpha_0 E(x_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_j E(x_j x_i)$$

$$\begin{aligned} E[\mu_{n+1}(\Theta)x_i] &= E\{E[\mu_{n+1}(\Theta)x_i|\Theta]\} = E[\mu_{n+1}(\Theta)E(x_i|\Theta)] = E[E(x_{n+1}|\Theta)E(x_i|\Theta)] \\ &= E[E(x_{n+1}x_i|\Theta)] = E(x_{n+1}x_i) \end{aligned}$$

$$E(x_{n+1}x_i) = \alpha_0 E(x_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_j E(x_j x_i) \quad \text{式(2)}$$

(1)に $E(x_i)$ を乗じて、(2)を引く

$$E(x_{n+1}x_i) - E(x_{n+1})E(x_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j [E(x_j x_i) - E(x_j)E(x_i)]$$

$$\text{Cov}(x_j, x_i) = E[(x_j - E(x_j))(x_i - E(x_i))] = E(x_j x_i) - E(x_j)E(x_i)$$

$$\text{Cov}(x_{n+1}, x_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{Cov}(x_j, x_i) \quad \text{任意の } i \text{ に対して 式(3)}$$

変数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ に対して、式(3)の方程式が n 本であり、一般にこれらの解は求められる。

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が求められることから、式(1)より α_0 の解は求められる。

従って、 $\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ が最適解となる。

参考 5. 信頼性理論

B. Bühlmann モデル

まず、 $E(x_i) = \mu$ 、 $\text{Var}(x_i) = \sigma^2$ 、 $\text{Cov}(x_j, x_i) = \rho\sigma^2$ のケースを考える。

$$\begin{aligned} \text{式(1)より、} \mu &= \alpha_0 + \mu \sum_{j=1}^n \alpha_j \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j &= 1 - (\alpha_0 / \mu) \quad \text{式(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式(3)より、} \rho &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j \rho + \alpha_i \\ \rho &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \rho + \alpha_i (1 - \rho) \quad \text{式(5)} \end{aligned}$$

上記(4)、(5)より、
 $\alpha_i = \rho\alpha_0 / [\mu(1 - \rho)]$ 、 $\sum_{j=1}^n \alpha_j = n\rho\alpha_0 / [\mu(1 - \rho)]$

上記(4)に代入すると
 $\alpha_0 = [\mu(1 - \rho)] / [(1 + (n - 1)\rho)]$

$$\alpha_j = \rho / [(1 + (n - 1)\rho)]$$

よって、最適解は次のとおりとなる。
 $\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = (1 - Z)\mu + Z\bar{x}$

ただし、 $Z = n\rho / [(1 + (n - 1)\rho)]$ 、 $\bar{x} = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{j=1}^n x_j$

Bühlmann モデルに適用する。

$$\text{Prem} = Z\bar{X} + (1 - Z) \mu$$

$$k = v/a =$$

$$E(x_j|\Theta) = \mu(\Theta)、E[\text{Var}(x_j|\Theta)] = v、\text{Var}[E(x|\Theta)] = a \text{ とする。}$$

$$E(x_j) = E[E(x_j|\Theta)] = E[\mu(\Theta)] = \mu$$

$$\begin{aligned} E(x_j^2) &= E[E(x_j^2|\Theta)] \\ &= E[\text{Var}(x_j|\Theta)] + E[E(x_j|\Theta)^2] \end{aligned}$$

$$E(x_j^2) - E(x_j) = E[\text{Var}(x_j|\Theta)] + \{E[E(x_j|\Theta)^2] - E[E(x_j|\Theta)]\}$$

$$\text{Var}(x_j) = E[\text{Var}(x_j|\Theta)] + \text{Var}[E(x_j|\Theta)] = v + a$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_j, x_i) &= E(x_j x_i) - E(x_j) E(x_i) = E[E(x_j|\Theta)E(x_i|\Theta)] - \mu^2 \\ &= E[\mu(\Theta)^2] - \{E[\mu(\Theta)]\}^2 = \text{Var}[\mu(\Theta)] = a \end{aligned}$$

$$\rho = \text{Cov}(x_j, x_i) / \text{Var}(x_j) = a / (v + a)、(1/\rho) - 1 = v/a = k \text{ であるから、}$$

参考 5. 信頼性理論

$Z = n / [n + (1 - \rho)/\rho] = n / (n + k)$ である。

従って、信頼度は $Z = n/(n+k)$ となる。

C. Bühlmann-Straub モデル

$\text{Var}(x_j | \Theta = \theta) = v(\theta) / m_j$ 、ただし $\sum_{j=1}^n m_j = m$ 、 $E(x_j | \Theta) = \mu(\Theta)$ 、 $E[v(\Theta)] = v$ 、 $\text{Var}[E(x | \Theta)] = a$ とする。

$$E(x_j) = E[E(x_j | \Theta)] = E[\mu(\Theta)] = \mu$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_j, x_i) &= E(x_j x_i) - E(x_j) E(x_i) = E[E(x_j | \Theta) E(x_i | \Theta)] - \mu^2 \\ &= E[\mu(\Theta)^2] - \{E[\mu(\Theta)]\}^2 = \text{Var}[\mu(\Theta)] = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_j) &= E[\text{Var}(x_j | \Theta)] + \text{Var}[E(x_j | \Theta)] \\ &= E[v(\theta) / m_j] + \text{Var}[E(x_j | \Theta)] \\ &= v / m_j + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式(1)より、} \mu &= \alpha_0 + \mu \sum_{j=1}^n \alpha_j \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j &= 1 - (\alpha_0 / \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式(3)より、} a &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j a + \alpha_i (a + v / m_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j a + (\alpha_i v / m_j) \end{aligned}$$

$$\alpha_j = (a m_j / v) (1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j) = (a \alpha_0 / \mu v) \sum_{j=1}^n m_j = (a \alpha_0 m) / \mu v$$

$$\alpha_0 = \frac{v/a}{m+v/a} \mu, \quad \alpha_j = (a \alpha_0 m) / \mu v = \frac{m_j}{m+v/a}$$

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = (1 - Z) \mu + Z \bar{x}$$

$$\text{ただし、} Z = m / (m + k), \quad \bar{x} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{m} \right) x_j$$

参考 6. 割増引制度 (BMS)

A. BMS の表現

BMS は Markov Chain としての性格を有する。このことをクラス移行行列 T とこれに確率を反映した推移行列 M によって表記できる。

K 回事故を起こす推移 T_k は次のとおりである。

$T_k = (t_{ij}^{(k)})$: $T_k (i)=j$ のとき $T_k(t_{ij}^{(k)})=1$ 、それ以外は $T_k(t_{ij}^{(k)})=0$

$t_{ij}^{(k)} \geq 0, \sum_j t_{ij}^{(k)}=1$

λ : 事故頻度とする。

推移確率 $p_{ij}(\lambda)$ は、 $p_{ij}(\lambda) = \sum_k p_k(\lambda) t_{ij}^{(k)}$

$M(\lambda) = (p_{ij}(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k$

各クラス i の保険料 $b_i(\lambda)$ をベクトル表示し、 $b(\lambda)$ とする

$(b(\lambda) = [b_1(\lambda), b_2(\lambda), b_3(\lambda), b_4(\lambda), \dots, b_s(\lambda)])$ このとき、 $b(\lambda) \times M(\lambda)$ が推移後のクラスごとの保険料となる。

B. 弾力性

Loimaranta の論文に掲載の例をもとに説明する。

無限回推移し、定常状態となった i クラスの確率を a_j とする。

a_j のベクトル $A = (a_1, a_2, a_j, \dots, a_n)$

$A = AM, \sum_{j=1}^n a_j = 1$

$\frac{dA}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda} M + A \frac{dM}{d\lambda}, \sum_{j=1}^n \frac{da_j}{d\lambda} = 0$

ある BMS の定常状態 M が、次のポワソン分布の行列になるとする。

$p_k(\lambda) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$ とすると。

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 - p_0(\lambda) & 0 & p_0(\lambda) & 0 & 0 \\ 1 - p_0(\lambda) & 0 & 0 & p_0(\lambda) & 0 \\ 1 - [p_0(\lambda) + p_1(\lambda)] & p_1(\lambda) & 0 & p_0(\lambda) & 0 \\ 1 - [p_0(\lambda) + p_1(\lambda)] & p_1(\lambda) & 0 & 0 & p_0(\lambda) \\ 1 - [p_0(\lambda) + p_1(\lambda)] & p_1(\lambda) & 0 & 0 & p_0(\lambda) \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0.2$ とする。

$A = AM$ および $\sum_{j=1}^5 a_j = 1$ より、 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ が次頁表のとおり求められる。

$b = \sum_{j=1}^5 a_j b_j = 0.70096$

参考 6. 割増引制度 (BMS)

$\frac{dA}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda} M + A \frac{dM}{d\lambda}$ および $\sum_{j=1}^n \frac{da_j}{d\lambda} = 0$ より、 $da_j/d\lambda$ が、下表のとおり求められる。

$$\frac{dM(\lambda)}{d\lambda} = \begin{bmatrix} p_0(\lambda) & 0 & -p_0(\lambda) & 0 & 0 \\ p_0(\lambda) & 0 & 0 & -p_0(\lambda) & 0 \\ p_1(\lambda) & [p_0(\lambda) - p_1(\lambda)] & 0 & -p_0(\lambda) & 0 \\ p_1(\lambda) & [p_0(\lambda) - p_1(\lambda)] & 0 & 0 & -p_0(\lambda) \\ p_1(\lambda) & [p_0(\lambda) - p_1(\lambda)] & 0 & 0 & -p_0(\lambda) \end{bmatrix}$$

クラス	b_j	a_j	$da_j/d\lambda$
1	4/3	0.04721	0.41654
2	1	0.13406	0.40219
3	1	0.03865	0.30238
4	3/4	0.14140	0.43545
5	9/16	0.63868	-1.55656

$$\frac{db}{d\lambda} = \sum_{j=1}^5 \frac{da_j}{d\lambda} b_j = 0.71098$$

$$\eta(\lambda) = \frac{dP(\lambda)/P(\lambda)}{d\lambda/\lambda} = \frac{db}{d\lambda} \times \frac{\lambda}{b} = 0.20286$$

<参考資料>

- ・伊藤清『確率論』(1991)
- ・国沢清典『確率論とその応用』(1982)
- ・木島正明・田中敬一『資産の価格付けと測度変換』(2007)
- ・損害保険事業総合研究所『欧米保険市場における個人向け保険商品の特性と販売・募集の実態』(損害保険事業総合研究所、2007.9)
- ・損害保険事業総合研究所『主要国の保険業界関連組織の役割・活動と法的背景』(損害保険事業総合研究所、2008.3)
- ・田中博之「パーソナル保険の引受けにおけるクレジットスコアの利用 —米国損害保険業界の現状—」損保総研レポート第76号(損害保険事業総合研究所、2008.3)
- ・自動車保険料率算定会『自動車損害賠償責任保険料率制度 海外調査報告書 第2編アメリカ』(1987.3)
- ・森平爽一郎「保険価格決定理論 保険数理とファイナンス理論の融合」アクチュアリージャーナル 第54号(日本アクチュアリー会、2004.10)
- ・森平爽一郎「経験積率母関数によるエッシャー変換のノンパラメトリック・アプローチ」リスクと保険 Vol.3(日本保険・年金リスク学会、日本アクチュアリー会、2007.3)
- ・Black, F and Scholes, M. "The Pricing of Option and Corporate Liabilities' (1973)
- ・Hans Bühlmann, 'Mathematical Methods in Risk Theory' (1970)
- ・Hans Bühlmann, 'An Economic Premium Principle', ASTIN Bulletin Vol.11 (1980)
- ・Hans Bühlmann, 'The General Economic Premium Principle', ASTIN Bulletin Vol.14 (1984)
- ・Darrell Duffie D. 'Daynamic Asset Pricing Theory' (1992)
- ・William Feller, "An Introduction to Probability and Its Application Vol.1 (3rd edition) and Vol.2', Willey (1968,1966)
- ・Hans U. Gerber, 'An Introduction to Mathematical Risk Theory' (1979)
- ・Hans U. Gerber and Ellias S.W.Shiu, 'Option Pricing by Esscher Transforms', Transactions of Society of Actuaries Vol.46 (1994)
- ・Ioannis Karatzas and Steven E. Sgreve, 'Brownian Morion and Stochastic Calculus', (2nd edition) (1991)
- ・J.Michael Harrison and David M.Kreps, 'Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Market', Journal of Economic Theory (1979)
- ・J.Michael Harrison and Stanley R.Pliska 'Martingale and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading', Stochastic Pocesess and their Application 11(1981)
- ・Holtan J. 'Bonus Made Easy', ASTIN Bulletin 24 (1994)
- ・Masaaki Kijima, 'Amultivariate Extension of Equilibrium Pricing Transforms : The Multivariate Esscher and Wang Transforms for Pricing Financial and Insurance Risks', ASTIN Bulletin Vol.36 (2006)
- ・Stuartt A. Klugman, Harry H.Panjer, Gordon E.Willmot, ' Loss Models'(1998)

- K. Loimaranta , 'Some Asymptotic Properties of Bonus Systems' ASTIN Bulletin Vol.6 (1972)
- Jean Lemaire, 'Automobile Insurance Actuarial Models' (1985)
- Jean Lemaire, 'Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance' (1995)
- Jean Lemaire, 'Bonus-Malus Systems : The European and Asian Approach to Merit – Rating' (1998)
- Robert C. Merton, 'Continuous-Time Finance' (1990)
- Bernt Øksendal, 'Stochastic Differential Equations', (3rd edition) (1991)
- Steven E.Shreve, 'Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Model' (2004)
- Krupa S.Viswanathan and Jean Lemaire,'Bonus-Malus Systems in a Deregulated Enviroment : Forecasting Market Shares Using Diffusion Models', ASTIN Bulletin Vol.35 (2005)
- Shaun S. Wang, 'A Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks' , ASTIN Bulletin Vol.32 (2002)
- Shaun S. Wang, 'Equilibrium Pricing Transforms : New Results Using Buhlmann's 1980 Economic Model' , ASTIN Bulletin Vol.33 (2003)

<参考サイト>

- Insurance Information Institute (I.I.I.) ウェブサイト <http://www.iii.org/>